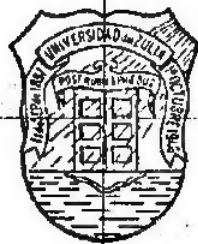


$$We = B \sum_{j=1}^n \Delta p_j Q [(t_n - t_j - 1)D]$$

UNIVERSIDAD DEL ZULIA  
FACULTAD DE INGENIERIA  
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEO  
MARACAIBO VENEZUELA

# YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO



RAMIRO PEREZ PALACIO

1969

Tiempo Adimensional,  $t_D$

$reD = 3,5$

$reD = 3,0$

$reD = 2,5$

$reD = 2,0$

$reD = 1,5$

UNIVERSIDAD DEL ZULIA  
FACULTAD DE INGENIERIA  
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEO  
MARACAIBO - VENEZUELA

YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO

RAMIRO PEREZ PALACIO

1969:

# C O N T E N I D O

	<u>Pag.</u>
SIMBOLOS	v
YACIMIENTOS DE PETROLEO O GAS CON EMPUJE HIDRAULICO	1
GENERALIDADES	1
Acuíferos	2
Mecanismo del Empuje Hidráulico	3
Reconocimiento de un Empuje Hidráulico	8
Recuperación	10
Rata de Producción para Máxima Eficiencia	15
DEDUCCION DE LA ECUACION DE DIFUSIVIDAD	17
Coordenadas Cartesianas	17
Coordenadas Radiales	23
SOLUCIONES DE LA ECUACION DE DIFUSIVIDAD APLICADA A ACUIFEROS	27
Acuíferos Lineales Homógeneos	28
Condiciones Iniciales	28
Condiciones de Límite (Contorno)	31
Acuíferos Infinitos	31
Caso 1.- Rata Terminal Constante	31,33
Caso 2.- Presión Terminal Constante	31,33
Acuíferos Finitos (Limitados)	32
Caso 3.- Rata Terminal Constante y Acuífero Cerrado	32,33
Caso 4.- Rata Terminal Constante y Presión Constante en el Límite Exterior	32,34
Caso 5.- Presión Terminal Constante y Acuífero Cerrado.	33,34
Caso 6.- Presión Terminal Constante y Presión en el Límite Exterior Constante	33,34

	ii
Acuíferos Lineales No-Homogéneos	40
Acuíferos Radiales Homogéneos	47
Condiciones Iniciales	50
Condiciones de Límite (Contorno)	50
Acuíferos Infinitos	51
Caso 1.- Rata Terminal Constante	51
A) Solución Exacta de van Everdingen y Hurst	53
B) Solución del Integral Exponencial, Ei	56
C) Solución de Mortada	57
Comparación de las soluciones del Caso 1	65
Caso 2.- Presión Terminal Constante	66
Acuíferos Finitos (Limitados)	74
Caso 3.- Rata Terminal Constante y Acuífero Cerrado	74
Caso 4.- Rata Terminal Constante y Presión en el Límite Exterior Constante	77
Caso 5.- Presión Terminal Constante y Acuífero Cerrado	85
Caso 6.- Presión Terminal Constante y Presión Constante en el Límite Exterior	97
Acuíferos Radiales No-Homogéneos	117
PRINCIPIO DE SUPERPOSICION	125
METODOS DE ANALISIS DE YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO	135
Determinación y Forma de Expresar la Intrusión de Agua, We	135
Análisis de la Historia si se Conoce el Petróleo o Gas Originalmente en el Yacimiento	136
Intrusión con Flujo Continuo	138
Intrusión con Flujo Continuo-Modificado	141
Intrusión con Flujo No-Continuo	144
Análisis de la Historia si se Desconoce el Petróleo o Gas Originalmente en el Yacimiento	151

	iii
Intrusión con Flujo Continuo	154
Intrusión con Flujo Continuo-Modificado	156
Intrusión con Flujo No-Continuo	159
Método VTM	160
Método de Havlena y Odeh	162
Método de McEwen	165
Método de Stanley	170
Eficiencia de Desplazamiento	173
PREDICCION DEL COMPORTAMIENTO DE YACIMIENTOS CON EMPUJE <u>HIDRAU</u> LICO	179
PREDICCION EN BASE A LA SOLUCION DEL CASO DE RATA TERMINAL CONSTANTE	185
OTROS METODOS DE ANALISIS Y PREDICCION	188
Método de Hutchinson y Sikora	188
Predicción	195
Funciones de Influencia	197
Modelos Eléctricos	199
Modelos Numéricos de Yacimiento	204
INTERFERENCIA ENTRE CAMPOS LOCALIZADOS EN UN MISMO ACUIFERO	206
REFERENCIAS	213
APENDICE A	218
Tabla IA - Valores del Integral Exponencial, $Ei(-x)$ , como Función de $x$	218
APENDICE B	221
Determinación del Cambio de Presión Adimensional, $\Delta p(t_D)$ , en términos de $t_D$ , para el Caso 3 de Sistemas Radiales, usando la Función $F(t_{DA})$ de Matthews, Brons y Hazebroek, MBH	221
APENDICE C	224
1 - Cálculo del Integral $f(p,t)$ de la Ecuación de Schilthuis	224
2.- Cálculo del Integral $f(p,t)$ de la Ecuación de Hurst Modi ficada	227

3.- Cálculo de la Sumatoria $f(p,t)$ de la Ecuación de van Everdingen y Hurst	229
---	-----

230

## APENDICE D

Determinación del Petróleo o Gas originalmente en el Yacimiento y la Constante de Intrusión de Agua por Mínimos Cuadrados.	230
--	-----

# S I M B O L O S

La nomenclatura usada en su mayor parte se adapta a la nomenclatura aprobada por la Sociedad de Ingenieros de Petróleo de la AIME<sup>17</sup>.

<u>Símbolo</u>	<u>N o m b r e</u>	<u>Dimensión</u>	<u>Unidades más Usadas</u>
A	área	$L^2$	pies <sup>2</sup> , acre
b	ancho en un sistema lineal	L	pies
BAF	factor de recuperación en barriles por acre-pie	adimensional	BN/acre-pie
B <sub>g</sub>	factor volumétrico del gas	adimensional	BY/PCN
B <sub>ig</sub>	factor volumétrico del gas a la presión de inyección	adimensional	BY/PCN
B <sub>o</sub>	factor volumétrico del petróleo	adimensional	BY/PCN
B <sub>t</sub>	factor volumétrico total o bifásico	adimensional	BY/BN
C	constante de intrusión de agua	$L^4 T/M$	BN/mes/lpc
C <sub>s</sub>	constante de intrusión de agua de Schilthuis	$L^4 T/M$	BN/mes/lpc
C <sub>h</sub>	constante de intrusión de agua de Hurst-Modificada	$L^4 T/M$	BN/mes/lpc
C <sub>v</sub>	constante de intrusión de agua de van Everdingen y Hurst	$L^4 T/M$	BN/mes/lpc
c	compresibilidad	$LT^2/M$	1/lpc
c <sub>p</sub>	compresibilidad de los poros	$LT^2/M$	1/lpc
c <sub>r</sub>	compresibilidad de la parte sólida de la roca	$LT^2/M$	1/lpc
c <sub>b</sub>	compresibilidad total de la roca	$LT^2/M$	1/lpc
c <sub>e</sub>	compresibilidad efectiva	$LT^2/M$	1/lpc
c <sub>o</sub>	compresibilidad del petróleo	$LT^2/M$	1/lpc

<u>Símbolo</u>	<u>N o m b r e</u>	<u>Dimensión</u>	<u>Unidades más Usadas</u>
e	rata de intrusión	$L^3/T$	BN/día
$f_d$	flujo fraccional de la fase desplazante	dimensional	-
g	aceleración de la gravedad	$L/T^2$	cm/seg <sup>2</sup>
G	gas libre inicialmente en el yacimiento	$L^3$	PCY
$G_i$	gas inyectado acumulado	$L^3$	PCN
$G_p$	gas producido acumulado de un yacimiento	$L^3$	PCN
$G_{pc}$	gas producido de la capa de gas	$L^3$	PCN
h	espesor de la formación productora	L	pies
J	índice de productividad	$L^4 T/M$	BNPD/lpc
$J_0$	función de Bessel de primera clase y de orden cero	adimensional	-
$J_1$	función de Bessel de primera clase y de primer orden	adimensional	-
k	permeabilidad absoluta	$L^2$	md
$k_o$	permeabilidad efectiva del petróleo	$L^2$	md
$k_g$	permeabilidad efectiva del gas	$L^2$	md
$k_w$	permeabilidad efectiva del agua	$L^2$	md
$k_{ro}$	permeabilidad relativa del petróleo	adimensional	-
$k_{rg}$	permeabilidad relativa del gas	adimensional	-
$k_{rw}$	permeabilidad relativa del agua	adimensional	-
L	longitud	L	pies
ln	logaritmo natural (base e)	-	-
log	logaritmo decimal (base 10)	-	-
m	razón del volumen de gas libre al volumen de petróleo inicialmente en el yacimiento	adimensional	-



<u>Símbolo</u>	<u>N o m b r e</u>	<u>Dimensión</u>	<u>Unidades más Usadas</u>
N	petróleo originalmente en un yacimiento	$L^3$	BN
$N_p$	producción acumulada de petróleo	$L^3$	BN
$\Delta N_p$	producción durante un intervalo $\Delta t$ .	$L^3$	BN
p	presión	$M/LT^2$	lpca
$P_a$	presión atmosférica o de abandono	$M/LT^2$	lpca
$P_b$	presión en el punto de burbujeo	$M/LT^2$	lpca
$P_e$	presión en el límite exterior	$M/LT^2$	lpca
$P_i$	presión inicial	$M/LT^2$	lpca
$P_{sc}$	presión a condiciones normales	$M/LT^2$	lpca
$P_w$	presión en el fondo del pozo	$M/LT^2$	lpca
$P_{wf}$	presión en el fondo del pozo flu- yendo	$M/LT^2$	lpca
$P_{ws}$	presión en el fondo del pozo está- tica	$M/LT^2$	lpca
$P_c$	presión capilar	$M/LT^2$	lpca
$\Delta p(t_D)$	caída de presión adimensional. Va- lor numérico que representa la caída total de presión que ocurre en el límite interior de un yaci- miento o acuífero en el período ( $t_n - t_{j-1}$ ) <sub>D</sub> , debido a una caída u- nitaria en la rata de producción o intrusión en este límite, a par- tir del tiempo $t_{j-1}$	adimensional	-
q	rata de producción (flujo) en el yacimiento	$L^3/T$	BPD
$q_o$	rata de producción de petróleo en el yacimiento	$L^3/T$	BPD
$q_g$	rata de flujo de gas en el yaci- miento	$L^3/T$	BPD
$Q_o$	rata de flujo de petróleo a con- diciones normales	$L^3/T$	BPD

<u>Símbolo</u>	<u>N o m b r e</u>	<u>Dimensión</u>	<u>Unidades más Usadas</u>
$Q_g$	rata de flujo de gas a condiciones normales	$L^3/T$	BPD
$Q(t_D)$	intrusión adimensional. Valor numérico que representa el volumen total de fluido por unidad de espesor de formación que pasa por el límite interior de un yacimiento o acuífero en el período $(t_n - t_{j-1})_D$ , debido a una caída de presión unitaria en este límite interior, a partir del tiempo $t_{j-1}$	adimensional	-
$r$	distancia radial	$L$	pies
$r_e$	radio en el límite exterior	$L$	pies
$r_w$	radio del pozo	$L$	pies
$r_D$	radio adimensional = $r/r_w$ (o $r/R_i$ )	adimensional	-
$r_{eD}$	radio adimensional = $r_e/r_w$ (o $r_e/R_i$ )	adimensional	-
$RE$	factor de recuperación en porcentaje respecto al petróleo originalmente en el yacimiento	adimensional	-
$R$	razón gas-petróleo instantánea, RGP	adimensional	PCN/BN
$R_i$	radio exterior del yacimiento o interior del acuífero	$L$	pies
$R_p$	razón gas-petróleo acumulativa	adimensional	PCN/BN
$R_s$	razón gas disuelto-petróleo	adimensional	PCN/BN
$S$	saturación	adimensional	-
$S_g$	saturación de gas	adimensional	-
$S_{gc}$	saturación crítica del gas	adimensional	-
$S_{gr}$	saturación residual del gas	adimensional	-
$S_o$	saturación de petróleo	adimensional	-
$S_{or}$	saturación residual de petróleo	adimensional	-
$S_w$	saturación de agua	adimensional	-

<u>Símbolo</u>	<u>N o m b r e</u>	<u>Dimensión</u>	<u>Unidades más Usadas</u>
$S_{wc}$	saturación crítica de agua	adimensional	-
$\bar{S}_{wf}$	saturación promedia de agua en la zona invadida por el agua de intrusión	adimensional	-
$\bar{S}_{gf}$	saturación promedia de gas en la zona invadida por el agua de intrusión	adimensional	-
$t$	tiempo	T	días
$t_D$	tiempo adimensional = $0,006323 \text{ kt}/\phi \mu c r_w^2$	adimensional	-
$t_{Dr}$	tiempo adimensional = $t_D/r_D^2$	adimensional	-
$t_{DA}$	tiempo adimensional = $t_D/\pi r_{eD}^2$	adimensional	-
$\Delta t$	intervalo de tiempo	T	-
$\Delta t_D$	constante que transforma tiempo dimensional a tiempo adimensional	1/T	1/día
$t$	temperatura absoluta	-	°R
$u$	velocidad volumétrica de flujo (rata volumétrica por unidad de área)	L/T	pies/día
$u$	variable de integración	adimensional	-
$V$	volumen	$L^3$	PC
$V_p$	volumen poroso	$L^3$	PC
$W_e$	intrusión de agua acumulada	$L^3$	BN
$\Delta W_e$	intrusión de agua durante un intervalo $\Delta t$	$L^3$	BN
$W_p$	agua producida acumulada	$L^3$	BN
$\Delta W_p$	agua producida durante un intervalo $\Delta t$	adimensional	BN
$Y_0$	función de Bessel de segunda clase y de orden cero	adimensional	-
$Y_1$	función de Bessel de segunda clase y de primer orden	adimensional	-

<u>Símbolo</u>	<u>N o m b r e</u>	<u>Dimensión</u>	<u>Unidades más Usadas</u>
z	factor de compresibilidad del gas	adimensional	-
Z	función de resistencia. Valor que representa la caída total de presión en el límite interior de un yacimiento durante el período $(t_n - t_{j-1})_D$ , debido a una caída unitaria en la rata de producción o intrusión en este límite interior a partir del tiempo $t_{j-1}$	$M/L^4T$	lpc/BPD
$\Delta Z$	valor de la función de resistencia al tiempo t menos la función de resistencia al tiempo $t - \Delta t$ , $\Delta Z = Z_{t-\Delta t}$	$M/L^4T$	lpc/BPD

#### L E T R A S G R I E G A S

$\alpha$	alfa	ángulo que forma la dirección de flujo con la horizontal	-	grados
$\theta$	teta	ángulo correspondiente a la circunferencia de la cual actúa el acuífero	-	grados
$\sigma$	sigma	desviación normal	-	-
$\phi$	fi	porosidad	adimensional	-
$\mu$	mu	viscosidad	$M/LT$	cp
$\mu_o$	mu	viscosidad del petróleo	$M/LT$	cp
$\mu_g$	mu	viscosidad del gas	$M/LT$	cp
$\rho$	ro	densidad	$M/L^3$	lbs/PC
$\rho_o$	ro	densidad del petróleo	$M/L^3$	lbs/PC
$\rho_w$	ro	densidad del agua	$M/L^3$	lbs/PC
$\rho_g$	ro	densidad del gas	$M/L^3$	lbs/PC

A B R E V I A C I O N E S

<u>N o m b r e</u>	<u>Abreviación</u>
libras por pulgada cuadrada absoluta	lpca
libras por pulgada cuadrada relativa o manométrica	lpcr, lpcm
centímetro	cm
centímetro cuadrado	cm.c
centímetro cúbico	cm.cu.
píes cúbicos	PC
píes cúbicos a condiciones normales	PCN
barriles a condiciones normales	BN
píes cúbicos a condiciones del yacimiento	PCY
barriles a condiciones del yacimiento	BY

S U B I N D I C E S

<u>Símbolo</u>	<u>N o m b r e</u>
a	atmosférica
a	abandono
c	crítica
c	capitar
cap	contacto agua-petróleo
d	fase desplazante
D	adimensional
g	gas
i	valor o condiciones iniciales
j	número de intervalos
max	máximo
min	mínimo
n	número total de intervalos
o	petróleo
p	poro
r	radial
r	relativa
s	solución de gas en petróleo ( $R_g$ )
w	agua
w	a las condiciones del pozo
x	dirección x
y	dirección y
z	dirección z

## YACIMIENTOS DE PETRÓLEO O GAS CON EMPUJE HIDRAULICO

El término  $W_e$  que aparece en las ecuaciones de Balance de Materiales<sup>1</sup>, representa la cantidad de agua que entra a un yacimiento de petróleo o gas, proveniente de formaciones adyacentes saturadas de agua (acuíferos), como consecuencia de la disminución de presión en el contacto agua-petróleo, debido a la producción de fluidos del yacimiento. La magnitud del término  $W_e$  está relacionada con la actividad del acuífero y forma parte de la energía total disponible para producir el petróleo. Al término  $W_e$  se le denomina Intrusión de Agua y los yacimientos que lo presentan se denominan Yacimientos con Empuje Hidráulico o Hidrostático.

El presente trabajo comienza con una sección general sobre yacimientos con empuje hidráulico. Presenta luego la deducción y solución de la ecuación de flujo transitorio o ecuación de difusividad aplicada a intrusión de agua, tanto para sistemas lineales como radiales. Continúa con una discusión de los principales métodos para análisis de yacimientos con empuje hidráulico, referente a la evaluación de la intrusión de agua, petróleo originalmente en el yacimiento, etc. Se discuten luego los métodos de predicción de este tipo de yacimientos.

### GENERALIDADES

Empuje hidráulico es generalmente el mecanismo de recuperación primaria más eficiente en yacimientos de petróleo. Al mismo tiempo, algunos de los yacimientos más productores del mundo han sido producidos bajo este mecanismo. Entre muchos, pueden mencionarse el campo East Texas, Conroe, Yates, Thompson y Friendwood en los Estados Unidos; el campo Kirkut en Irak y los campos de Arabia Saudita.

### Acuíferos.

Los yacimientos con empuje hidráulico están total o parcialmente comunicados con formaciones adyacentes totalmente saturadas de agua, que reciben el nombre de acuíferos (Latín: aqua = agua y ferreus = llevar). Tales acuíferos pueden estar situados en la periferia de la formación productora del yacimiento y en este caso, se denominan acuíferos laterales o de flanco, o pueden estar situados por debajo de la formación productora y en tal caso se denominan acuíferos de fondo.

Los mecanismos correspondientes se denominan empuje hidráulico lateral y empuje hidráulico de fondo respectivamente. En los acuíferos laterales sólo una parte del área de la zona de petróleo está en contacto con el acuífero; en cambio, en un acuífero de fondo, éste se encuentra en contacto con la totalidad del área productora. La parte donde se une el acuífero y la zona petrolífera se denomina simplemente, contacto agua-petróleo.

En un acuífero lateral, el agua avanza por los lados o costados del yacimiento y generalmente su migración se dirige a las partes altas de la estructura. Los pozos en la parte baja de la estructura son los primeros invadidos por el agua y la producción de agua aumenta rápidamente en tales pozos. En cambio en los acuíferos de fondo, el agua se mueve en dirección vertical; por tanto, en un yacimiento cuya formación productora sea horizontal, los pozos serán inundados por agua a un mismo tiempo siempre y cuando se produzcan bajo condiciones similares. Estos tipos de yacimientos con acuíferos de fondo han sido estudiados por Muskat<sup>2</sup>, Hutchinson y Kemp<sup>3</sup>, Henley y colaboradores<sup>4</sup>, Elkins<sup>5</sup>, Coats<sup>6</sup>, etc.

La forma de un acuífero puede ser muy variado, dependiendo



del tipo de estructuras y entrapamiento del sistema yacimiento acuifero. Aparte de los acuíferos de fondo mencionados antes, muchos sistemas yacimiento-acuífero pueden aproximarse bien sea a sistemas de tipo radial o de tipo lineal, para los cuales existen soluciones analíticas 7,8,9, para el cálculo de la intrusión. El tipo radial se encuentra más frecuentemente en estructuras tales como anticlinales y domos y el tipo lineal generalmente son resultado de entrapamiento por falla. La Fig.1 ilustra un tipo común de acuífero radial, donde la intrusión ocurre a través de toda la circunferencia. Ejemplos de este tipo de comportamiento pueden consultarse en la literatura<sup>10</sup>. Puede ocurrir que el flujo sea radial pero que el flujo ocurra sólo en una parte de la circunferencia; en tal caso, la intrusión será proporcional a la circunferencia efectiva en que ocurra la intrusión.

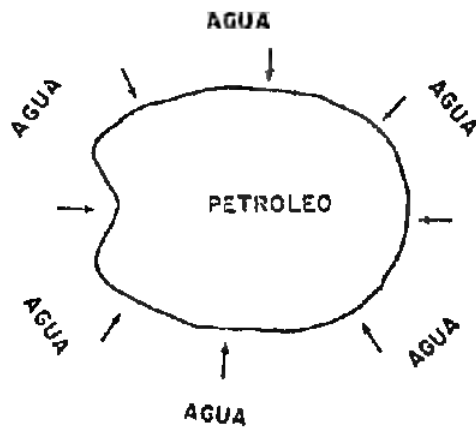
2. El tamaño del acuífero también puede variar mucho. Muskat<sup>11</sup> considera que si el volumen poroso del acuífero es alrededor de 1000 veces o más el volumen poroso del yacimiento, el acuífero puede considerarse de extensión infinita respecto al yacimiento, y usarse en esta forma en lo que respecta al comportamiento de flujo no-continuo. Tal tamaño corresponde, para acuíferos de forma radial, a un radio del acuífero de 32 veces el radio del campo de petróleo, es decir,  $r_{ed} = 32$ . Acuíferos de tamaño menor al mencionado se consideran de tamaño finito y es necesario conocer los límites del mismo con el propósito de evaluar su radio o longitud respecto al radio o longitud del yacimiento. Sin embargo, la ecuación de difusividad, como se verá más adelante, ha sido resuelta para muchos valores de  $r_{ed}$ .

#### Mecanismo del Empuje Hidráulico.

El principal factor que impulsa el agua a fluir a un yacimien



a) Corte Vertical



b) Corte Horizontal

Fig. 1 - Ilustración de un sistema yacimiento-acuífero tipo radial

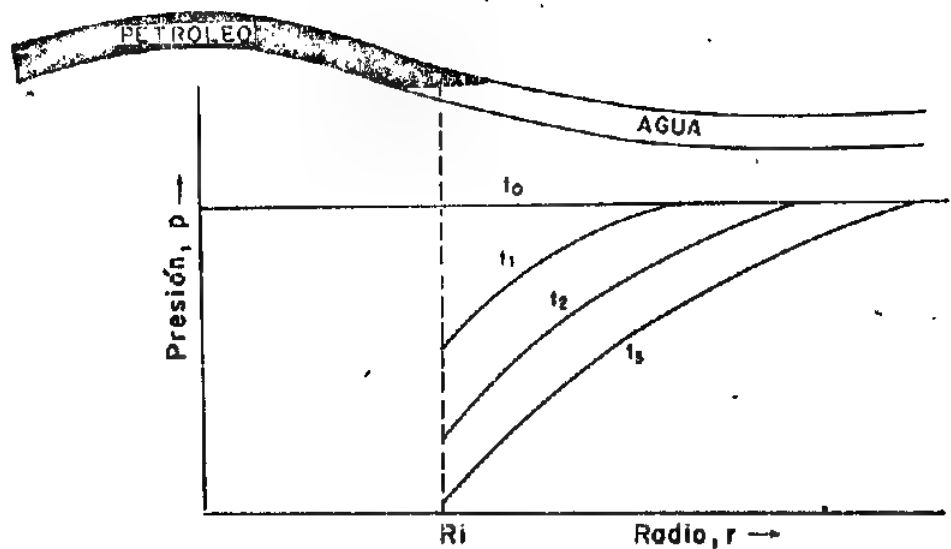


Fig. 2 - Distribución de presión con tiempo en un acuífero de extensión infinita.  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ .

to de petróleo es la expansión del agua del acuífero. A medida que la presión disminuye en un yacimiento debido a su propia producción de hidrocarburos, se crea una presión diferencial entre el yacimiento y el acuífero. Cuando una presión diferencial (disturbio de presión) llega al contacto agua-petróleo, el agua del acuífero cerca al yacimiento comienza a expandirse a la presión menor a medida que el tiempo avanza, el disturbio viaja a través del acuífero y más agua se expande a la presión menor, aumentando al mismo tiempo la intrusión de agua al yacimiento. Esto se ilustra gráficamente en la Fig.2, donde  $R_i$  es el radio inicial exterior del yacimiento (o el radio inicial interior del acuífero). Antes de iniciar la producción del yacimiento, la presión está representada por la línea  $t_0$ . Para tiempos posteriores  $t_1, t_2, t_3 \dots$  etc. las curvas de distribución de presión indican un aumento continuo del radio exterior de las curvas. Si el acuífero es lo suficientemente grande, tal que el diferencial de presión no alcanza un límite exterior del acuífero durante el periodo de interés, entonces se habla de un acuífero infinito. El tipo de flujo durante el cual el disturbio viaja a través del acuífero es estrictamente no-continuo. Finalmente el disturbio alcanza el límite exterior del acuífero y a partir de este instante, el flujo se convierte en semi-continuo (pseudo-continuo o cuasi-continuo) simplemente continuo. La Fig.3 ilustra la distribución de presión para este caso, a diferentes tiempos, donde  $r_e$  es el radio exterior del acuífero. Estos tipos de acuíferos se denominan limitados o finitos.

Pueden existir acuíferos con otras formas diferentes de energía al mecanismo descrito, considerado el más común. Algunas veces la formación del acuífero se extiende y aflora en superficie, donde una fuente de agua va reemplazando al agua que entra al yacimiento. Este tipo de acuífero se denomina acuífero abierto. En este caso, existe u

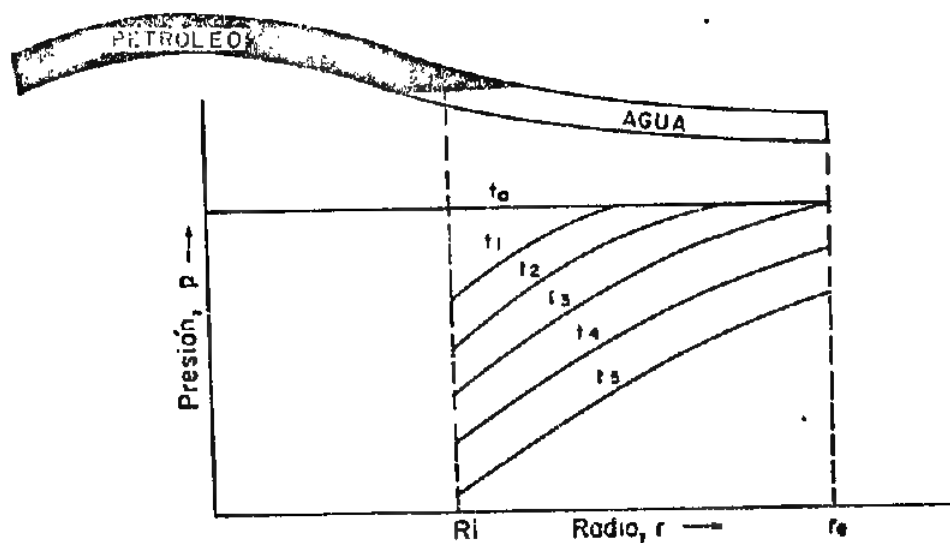


Fig. 3— Distribución de presión con tiempo en un acuífero de extensión limitada (finito).  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ .

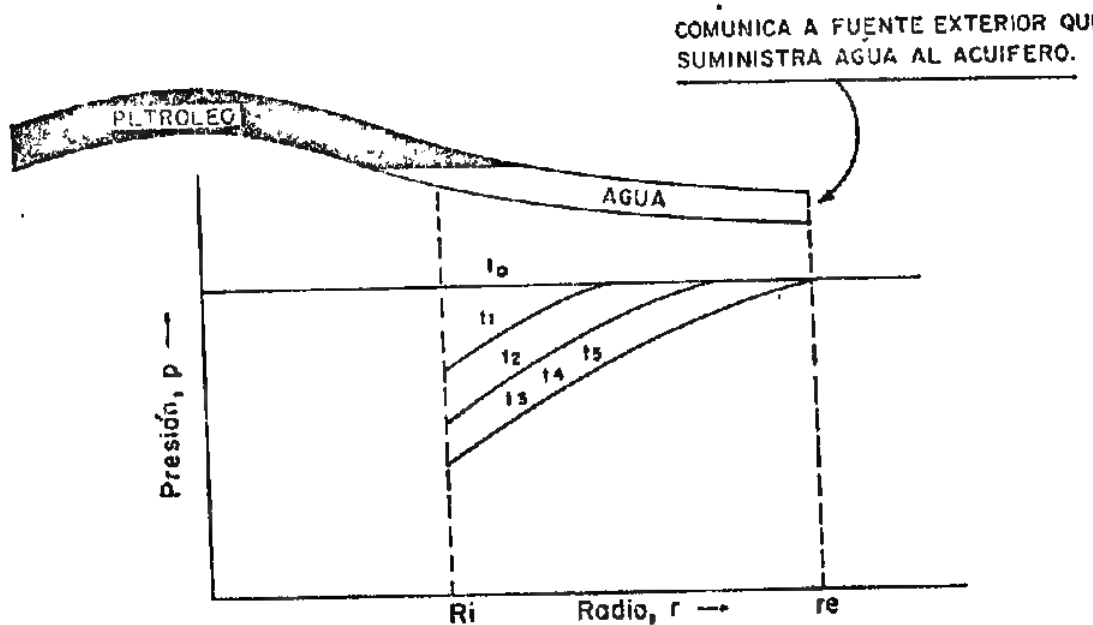


Fig. 4— Distribución de presión con tiempo para un acuífero con suministro exterior de agua  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ .

acuífero limitado (el radio exterior se extiende a la superficie) y el suministro de agua en superficie permite mantener una presión constante en el límite exterior del acuífero. Se habla entonces de flujo continuo o flujo arteciano. La distribución de presión en este caso se ilustra en la Fig.4. La existencia de este tipo de empuje hidráulico se ha descrito en la literatura<sup>12</sup>. Generalmente, en este tipo de acuífero, ocurre un contacto agua-petróleo inclinado.

Otro mecanismo que puede contribuir al suministro de agua al yacimiento es el debido al hundimiento de los estratos superpuestos. A medida que la producción aumenta, la superficie terrestre se hunde. Esto trae como consecuencia varias cosas: compactación de lutitas vecinas al yacimiento y expulsión de agua de las mismas hacia el yacimiento; compactación tanto de la formación productora (lo que también contribuye al aumento de la recuperación) y compactación del acuífero, lo que contribuye a aumentar el suministro de agua al yacimiento. Este tipo de hundimiento es muy común en varias partes del mundo, entre otras, en la zona de Lagunillas, en la Costa Bolívar del Lago de Maracaibo, Venezuela y la zona de Long Beach, Los Angeles, California, E.U.

El factor efectivo de expansión, o más comunmente conocido como el factor efectivo de compresibilidad del agua del acuífero, está formado por el factor de expansión mismo del agua del acuífero y por el factor de compresibilidad de la roca. Aunque este último término, en valor absoluto es generalmente pequeño, puede tomar un porcentaje considerable en el valor efectivo, debido al mayor volumen de rocas y especialmente en áreas donde ocurre hundimiento. Además, en casos en que ocurra solubilidad de gas en el agua<sup>13</sup>, ésta puede ser otra causa que contribuya a aumentar el factor efectivo de expansión, especialmente en

zonas cercanas al yacimiento si han ocurrido acumulaciones de gas libre durante la formación del acuífero. La obtención del factor de compresibilidad de la roca fué discutido en otro trabajo<sup>1</sup>.

### Reconocimiento de un Empuje Hidráulico

Antes de iniciar la explotación y durante la primera fase de producción de un campo, no es posible asegurar la existencia efectiva de un empuje hidráulico. Debe tenerse presente que los principales factores que conducen a un buen empuje hidráulico son: alta permeabilidad, que permita una fácil entrada del agua a la formación y el tamaño y continuidad del espesor del acuífero con distancia. Por ejemplo, un acuífero delgado, de baja permeabilidad y que presenta lentitud es muy posible que no presente, o presente muy poco empuje hidráulico. Debido a que la gran mayoría de las propiedades, tamaño y formación del acuífero son desconocidas en el momento de descubrir un campo, es por consiguiente necesario esperar hasta tener disponible cierta historia de producción, con el fin de determinar su existencia y analizar su comportamiento.

Existen varios indicativos con el fin de reconocer si ocurre empuje hidráulico. Comenzando con la perforación, puede decirse que si se localizan contactos agua-petróleo, (de registros, pruebas, etc), es una buena indicación que puede ocurrir intrusión de agua una vez iniciada la producción. También, si la presión inicial del campo está por encima del punto de burbujeo (indicación que no existe capa de gas inicial), lógicamente debe existir una fuente de energía que contribuyó al mantenimiento de tal presión en el campo. Tal fuente de energía puede ser un acuífero.

A medida que la producción avanza, se dispone de mejor infor

mación para reconocer si existe o no un acuífero activo, es decir, que ocurra intrusión de agua. El principal indicativo es el comportamiento de presión. Cuando la presión de un campo (o yacimiento) tiende a permanecer constante o disminuye muy poco, es indicación de un empuje hidráulico activo. Generalmente, al comienzo de la producción se presenta una caída de presión, ya que como antes se mencionó, es necesario crear una presión diferencial en el contacto agua-petróleo con el fin de que comience la intrusión y esto lógicamente, tarda cierto tiempo, que depende tanto del tamaño del yacimiento como de la rata de producción. Durante este tiempo, al no entrar ningún fluido extra al yacimiento, la caída será mayor. En general, puede decirse, que en el caso de acuíferos infinitos, la rata de disminución de presión es menor a medida que avanza el tiempo; en cambio, en acuíferos limitados, la rata de disminución de presión puede ser constante con tiempo. También debe tenerse en cuenta que la caída de presión se hace menor por debajo del punto de burbujeo debido a la liberación de gas.

A medida que se vaya disponiendo de historia de producción se recomienda calcular regularmente el petróleo originalmente en el yacimiento por balance de materiales<sup>1</sup>, considerando que no existe intrusión de agua, es decir,  $W_e = 0$ . Si el valor del petróleo originalmente en el yacimiento aumenta consecutivamente a medida que la producción avanza, es también indicación que ocurre intrusión de agua ya que la ecuación de balance de materiales se ha considerado sin el término de intrusión, lo que disminuye el valor calculado. Un gráfico del petróleo calculado originalmente en el yacimiento, como función de tiempo (o producción acumulada), permite obtener fácilmente el valor verdadero del petróleo originalmente en el yacimiento, simplemente leyendo el valor extrapolado, cuando el tiempo (o la producción acumulada) sea

cero. Una vez obtenido N, se regresa a la ecuación de balance de materiales y se calcula la intrusión de agua,  $W_e$ .

Finalmente, es indicación de un empuje hidráulico: (a) el valor relativamente constante del índice de productividad considerado en la base al campo como un total; (b) si la presión no disminuye por debajo del punto de burbujeo, la razón gas-petróleo de producción (instantánea) permanece constante; (c) la producción de agua aumenta, especialmente si existen pozos cerca al contacto agua-petróleo. El estudio de estos pozos en particular, contribuye notoriamente al reconocimiento de intrusión.

En acuíferos de fondo, la producción de agua aumenta principalmente debido a la formación de conos de agua alrededor de los pozos; si la producción disminuye debido a prorrqueo u otro factor, la presión de fondo en los pozos aumenta, ya que los efectos del acuífero continúan y tienden a restablecer un nuevo equilibrio en el yacimiento.

Debe tenerse presente que mientras más rápido se determine la intrusión de agua a un campo, puede planearse mejor su desarrollo, ya que la localización de los pozos y el espaciamiento puede variar considerablemente si existe o no un acuífero activo.

### Recuperación.

El factor de recuperación, definido como el petróleo recuperado por acre-pie de yacimiento o como porcentaje respecto al petróleo originalmente en el yacimiento, es un término afectado por muchas variables que dependen de las características de los fluidos y del yacimiento, lo mismo del arreglo de los pozos, etc.



Teniendo sólo consideraciones teóricas es bastante difícil incluir en una fórmula todas las variables que influyen en el factor de recuperación. Se han estudiado por separado algunos factores principalmente en procesos de invasión (inundación) con agua con fines de recuperación secundaria. También se han hecho algunas investigaciones de la recuperación usando una combinación de datos teóricos y de laboratorio, pero los esfuerzos se han dirigido principalmente a estudios de correlaciones y estadísticos usando datos de diferentes campos cuyo principal mecanismo de producción ha sido empuje hidráulico. En 1945, Craze y Buckley<sup>14</sup> publicaron un estudio estadístico, considerado hoy como clásico, sobre el efecto del espaciamiento de pozos en la recuperación en campos de petróleo, usando datos de 103 yacimientos. Posteriormente en 1955, Guthrie y Greenberger<sup>15</sup> usaron la misma información de Craze y Buckley para ilustrar el uso de análisis de correlación en la obtención de la mejor relación entre la eficiencia de recuperación en yacimientos con empuje hidráulico y varias combinaciones de parámetros, considerados como los principales que contribuyen a la eficiencia de recuperación. Más recientemente, en Octubre de 1967, el Instituto Americano del Petróleo, API<sup>16</sup> (American Petroleum Institute) publicó el API BUL. D-14 sobre un estudio estadístico de la recuperación, tanto de campos cuyo principal mecanismo de producción es empuje por gas en solución como empuje hidráulico. Es un estudio hecho por el Sub-comité Sobre Eficiencia de Recuperación del API, iniciado en 1956, y donde participó prácticamente toda la Industria Norte Americana, Compañías Consultoras y algunas Universidades.

El trabajo comprendió una evaluación y estudio de 312 yacimientos de Estados Unidos y otras partes del mundo. De estos yacimientos, fueron seleccionados 72 que representaron una información acepta-

ble para análisis de empuje hidráulico en arenas y areniscas. A través de estudios estadísticos de análisis de regresión y diferentes modelos y usando computadores digitales para derivar correlaciones, fué posible agrupar diferentes parámetros en una ecuación con el fin de determinar el factor de recuperación en tales yacimientos de empuje hidráulico. Es conveniente observar que el mencionado trabajo también incluye un estudio semejante para yacimientos con empuje por gas en solución.

Para yacimientos con empuje hidráulico, el factor de recuperación encontrado, en barriles normales de petróleo por acre-pie de formación productora, es,

$$BAF = \frac{4259 \left[ \frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}} \right]^{1,0422} \left[ \frac{k\mu_{wi}}{\mu_{oi}} \right]^{0,0770}}{(S_w)^{0,1903} \left[ \frac{p_i}{p_a} \right]^{0,2159}} \quad (1)$$

El mismo factor, expresado como un porcentaje respecto al petróleo originalmente en el yacimiento, es,

$$RE = \frac{54,898 \left[ \frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}} \right]^{0,0422} \left[ \frac{k\mu_{wi}}{\mu_{oi}} \right]^{0,0770}}{(S_w)^{0,1903} \left[ \frac{p_i}{p_a} \right]^{0,2159}} \quad (2)$$

donde  $p_a$  es la presión de abandono. Los demás términos corresponden a la nomenclatura normal de la AIME<sup>17</sup>. El subíndice  $i$  corresponde a condiciones iniciales. Debe tenerse cuidado en el uso de estas ecua

ciones, ya que ellas se aplican dentro determinado intervalo de validez para cada una de las variables que aparecen en las ecuaciones. Para valores muy altos o muy bajos de las variables se recomienda consultar el estudio original<sup>16</sup>. A veces es más conveniente escribir estas ecuaciones en forma logarítmica,

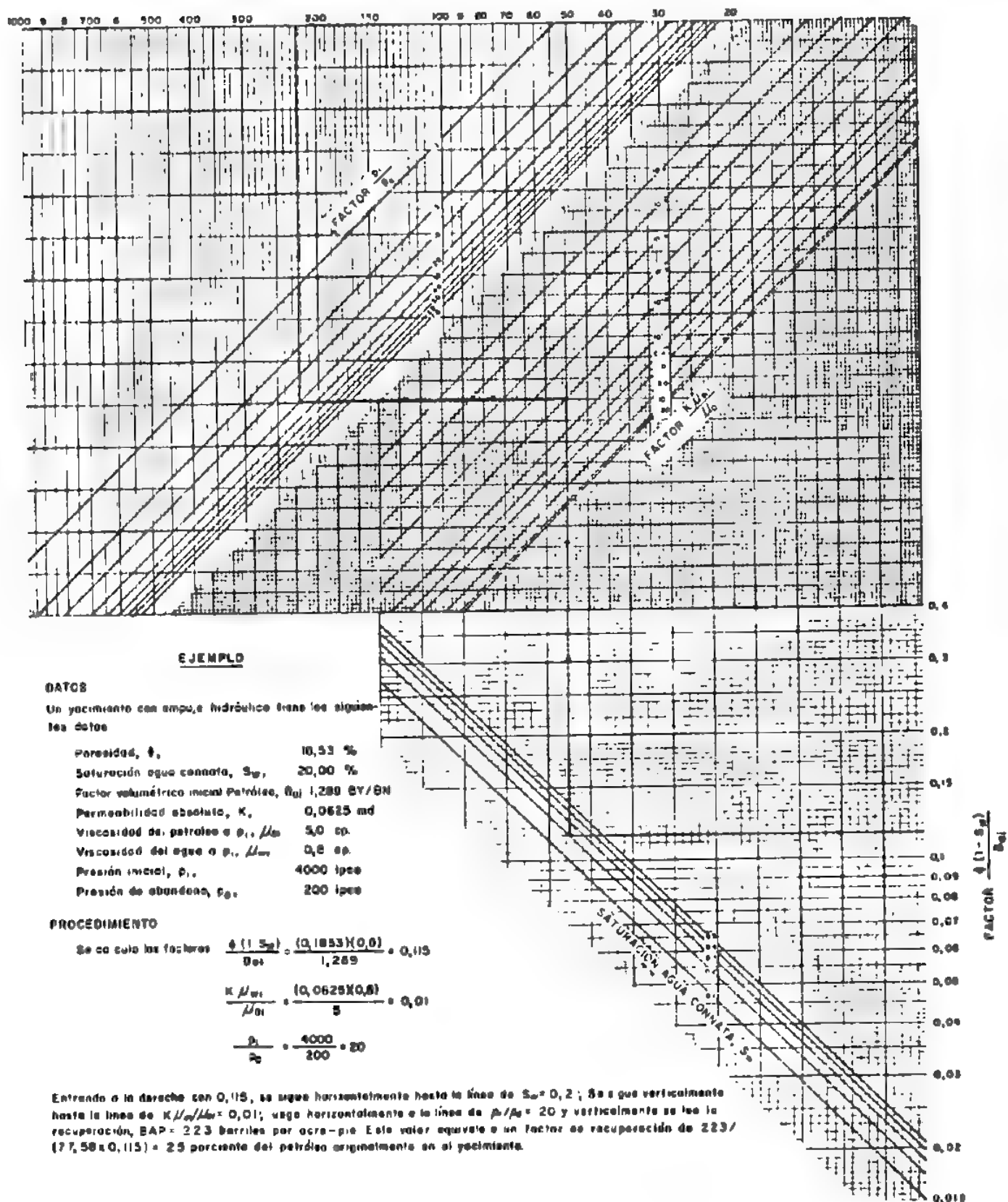
$$\begin{aligned} \log(\text{BAF}) = & \log(4259) + 1,0422 \log \left[ \frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}} \right] + 0,0770 \log \left[ \frac{k\mu_{wi}}{\mu_{oi}} \right] - \\ & - 0,1903 \log(S_w) - 0,2159 \log \left[ \frac{P_i}{P_a} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \log(\text{RE}) = & \log(54,898) + 0,0422 \log \left[ \frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}} \right] + 0,0770 \log \left[ \frac{k\mu_{oi}}{\mu_{oi}} \right] - \\ & - 0,1903 \log(S_w) - 0,2159 \log \left[ \frac{P_i}{P_a} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

El estudio en mención determinó un factor de recuperación promedio, RE, de 51,1 por ciento para yacimientos con empuje hidráulico en areniscas y un valor de 43,6 por ciento para yacimientos con empuje hidráulico en calizas y dolomitas.

La Ec.(1), o su equivalente la Ec.(3), se ha resuelto a través de un nomograma con el fin de facilitar los cálculos. Tal nomograma aparece en la siguiente página. El ejemplo incluido allí, ilustra claramente el procedimiento seguido con el fin de obtener el factor de recuperación, BAF, en barriles normales por acre-pie de yacimiento. So-

FACTOR DE RECUPERACION, BAP, BARRILES NORMALES POR ACRE-PIE.



lo es necesario conocer los factores  $\phi(1-S_w)/B_{oi}$ ,  $S_w$ ,  $k_{rw}/\mu_{oi}$  y  $p_i/p_a$ . Siguiendo el camino indicado por las flechas, se lee directamente el valor de BAP.

Para determinar el factor de recuperación, RE, como porcentaje del petróleo originalmente en el yacimiento, basta dividir el resultado obtenido del nomograma, BAP, por el factor  $77,58\phi(1-S_w)/B_{oi}$ ; pero ya que el término  $\phi(1-S_w)/B_{oi}$  ha tenido que calcularse para entrar al nomograma, es muy sencillo la obtención de RE. Analíticamente,

$$RE = \frac{BAP}{77,58 \left[ \frac{\phi(1-S_w)}{B_{oi}} \right]}$$

Esta relación puede establecerse fácilmente comparando las Ec.s(1) y (2). El ejemplo incluido en el nomograma, ilustra la obtención de RE a partir de BAP.

#### Rata de Producción para Máxima Eficiencia.

Este término se conoce comunmente en la literatura como MER (del ingles Maximum Efficient Rate). Es un término muy discutido<sup>18,19</sup> y debe tenerse en cuenta especialmente en yacimientos con empuje hidráulico.

Es lógico suponer que en un yacimientos donde existe una intrusión activa de agua, habrá una rata de producción de petróleo ideal, en

tal forma que ocurra el máximo desplazamiento de petróleo del área barrida por el agua. Por tanto, puede decirse que un yacimiento con empuje hidráulico es sensitivo a la rata de producción de petróleo. Varios factores deben tenerse presente: (1) la intrusión de agua puede ser pequeña comparada con la producción de petróleo, permitiendo que ocurra segregación, (2) la eficiencia de desplazamiento debido al agua de intrusión disminuye a medida que la rata de producción aumenta, (3) a altas ratas de producción de petróleo, las fuerzas capilares puedan llegar a ser insignificantes, en tal forma que el desplazamiento capilar de petróleo de zonas de baja permeabilidad sea prácticamente nulo, (4) a medida que la rata de producción aumenta, el contacto agua-petróleo se distorciona, bien sea por conificación o inclinación.

En general, la rata de producción para máxima eficiencia, puede definirse como la máxima cantidad de petróleo por unidad de tiempo que puede permitirse producir de un yacimiento, sin pérdida significante en la producción total. Tal rata de producción debe ser lo suficientemente baja, en tal forma que:

(1) En su mayoría el agua de intrusión reemplace el petróleo producido, es decir, impida que el empuje hidráulico disminuya o desaparezca su acción.

(2) Ocurra una alta eficiencia de desplazamiento en la zona invadida por agua de intrusión.

(3) Las fuerzas capilares desplacen el petróleo de zonas de baja permeabilidad.

(4) El contacto agua-petróleo avance lo más horizontalmente posible.

### DEDUCCION DE LA ECUACION DE DIFUSIVIDAD.

En esta sección se hará la deducción de la ecuación de difusividad para líquidos que fluyen a través de un medio poroso tanto en el sistema de coordenadas cartesianas como en el sistema de coordenadas radiales.

La ecuación de difusividad que describe matemáticamente el flujo de una sola fase a través de un medio poroso, es la combinación de tres ecuaciones: (a) la Ecuación de Continuidad, que no es más que un balance de masa o una forma diferencial de la Ley de Conservación de Masa, (b) la Ley de Darcy y (c) la Ecuación de Estado, que describe el tipo de fluido en movimiento.

#### Coordenadas Cartesianas.

Considérese un elemento de un medio poroso homogéneo, tal como el ilustrado en la Fig.5, donde ocurre flujo en tres direcciones,  $x, y, z$ . Durante un instante cualesquiera de observación,  $\Delta t$ , determinado flujo entra al sistema a través de las secciones (áreas)  $(\Delta y \Delta z)$ ,  $(\Delta x \Delta z)$  y  $(\Delta x \Delta y)$  y durante el mismo instante de observación,  $\Delta t$ , determinado flujo sale a través de estas mismas áreas en las secciones de salida localizadas a distancias  $\Delta x, \Delta y$  y  $\Delta z$  de las secciones de entrada.

Si  $u_i$  ( $i = x, y, z$ ) es la velocidad volumétrica de flujo (rate de flujo por área unitaria,  $(L^3/T)/L^2 = L/T$ ) en la dirección  $i$  y  $\rho$  la densidad del fluido,  $M/L^3$ , el flujo de masa por área unitaria en la dirección  $i$  será  $\rho u_i = (M/T)/L^2$ . Aplicando la Ley de Conservación de Masa a este elemento, puede escribirse para el tiempo de observación,  $\Delta t$ ,

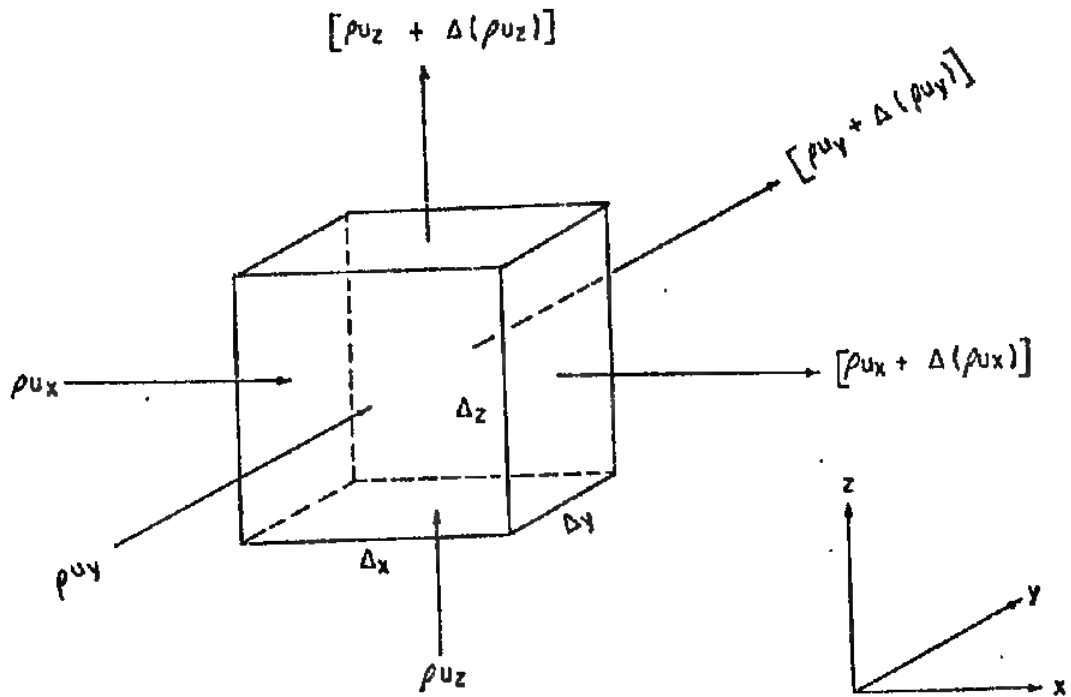


Fig. 5- Elemento de volumen de un medio poroso en tres dimensiones para deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas.

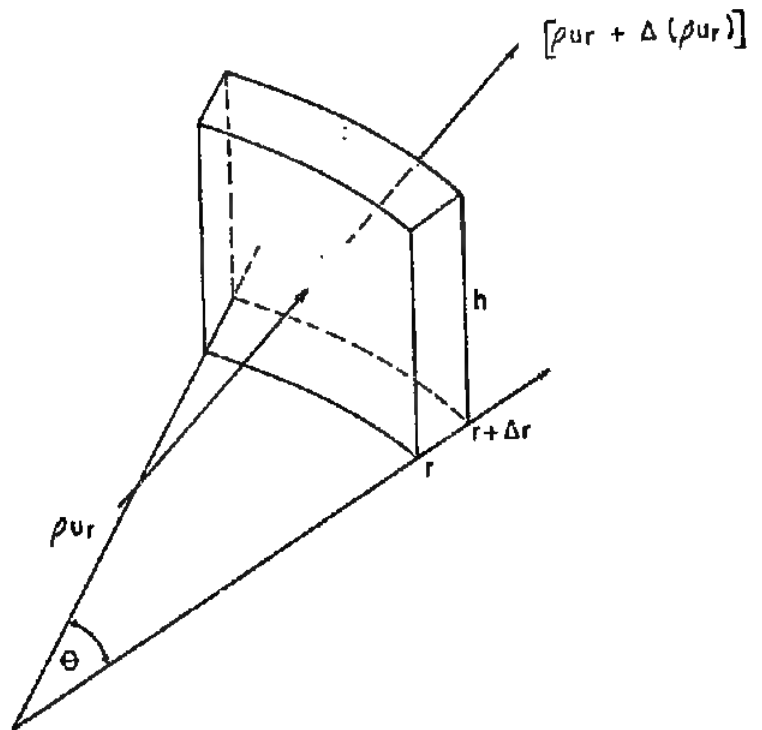


Fig. 6 - Elemento de volumen de un medio poroso para deducir la ecuación de continuidad en un sistema radial horizontal.



$$\left[ \begin{array}{l} \text{Cantidad de masa que} \\ \text{entra al elemento du} \\ \text{rante el tiempo } \Delta t. \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{Cantidad de masa que} \\ \text{sale del elemento du} \\ \text{rante el tiempo } \Delta t. \end{array} \right]$$

$$\pm \left[ \begin{array}{l} \text{Cantidad neta de masa} \\ \text{introducida (o retira} \\ \text{da) al elemento por} \\ \text{fuentes o (sumideros),} \\ \text{durante el tiempo } \Delta t. \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Acumulación de masa en} \\ \text{el elemento durante el} \\ \text{tiempo } \Delta t. \end{array} \right]$$

Aplicando este ley a cada de las direcciones x, y, z, la masa total que entra al elemento será el flujo de masa por área unitaria,  $\rho u_i$ , multiplicada por el área correspondiente,  $(\Delta z \Delta y)$ ,  $(\Delta z \Delta x)$  o  $(\Delta x \Delta y)$  por el instante de observación  $\Delta t$ . Aplicando lo anterior en la dirección x, la cantidad de masa que entra al elemento será,

$$(\rho u_x) (\Delta y \Delta z) (\Delta t)$$

y la cantidad de masa que sale durante el mismo instante de observación  $\Delta t$ , será,

$$[\rho u_x + \Delta(\rho u_x)] (\Delta y \Delta z) (\Delta t)$$

Asumiendo que no entra ni sale fluido del elemento a través de fuentes o sumideros, la cantidad neta de masa acumulada en el elemento en la dirección x será la cantidad de masa que entra menos la cantidad de masa que sale en el instante de observación  $\Delta t$ , o sea,

$$- [\Delta(\rho u_x) (\Delta y \Delta z) (\Delta t)] = - \Delta x \Delta y \Delta z \left[ \frac{\Delta(\rho u_x)}{\Delta x} \right]$$

Haciendo balances de masa similares para las direcciones y, z, la acumulación total en el elemento será la suma de tales acumulaciones,

$$- \Delta x \Delta y \Delta z \left[ \frac{\Delta(\rho u_x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho u_y)}{\Delta y} + \frac{\Delta(\rho u_z)}{\Delta z} \right] \Delta t \quad (5)$$

Por otro lado, la acumulación de masa en el elemento durante el instante de observación  $\Delta t$ , puede obtenerse en forma diferente. A un tiempo  $t$  cualesquiera, la masa de fluido existente en el elemento es

$$(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)]_t$$

y a un tiempo  $t + \Delta t$ , la masa de fluido existente en el elemento será,

$$(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)]_{t+\Delta t}$$

Por tanto, la acumulación de masa durante el instante  $\Delta t$ , será la cantidad de masa al tiempo  $(t + \Delta t)$  menos la cantidad de masa al tiempo  $t$ ,

$$[(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)] - [(\Delta x \Delta y \Delta z)(\phi)(\rho)]_t$$

Asumiendo que las dimensiones del elemento no varían durante el  $\Delta t$ , la expresión anterior puede escribirse,

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[ (\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t \right] \quad (6)$$

Las Ecs. (5) y (6) individualmente representan la acumulación de masa en el elemento durante el instante  $\Delta t$ . Igualándolas y simplificando,

$$- \left[ \frac{\Delta(\rho u_x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\rho u_y)}{\Delta y} + \frac{\Delta(\rho u_z)}{\Delta z} \right] = \left[ \frac{(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t}{\Delta t} \right]$$

En el límite, cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero, puede escribirse,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = - \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho) \quad (7)$$

La expresión anterior es la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas para flujo monofásico a través de un medio poroso.

El siguiente paso en la deducción de la ecuación de difusividad consiste en introducir la Ley de Darcy a la Ec.(7). Para el flujo en las direcciones x, y, z, esta ley puede escribirse,

$$u_x = - \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u_y = - \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$u_z = - \frac{k_z}{\mu} \left[ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right]$$

Sustituyendo en la Ec.(7),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k_x \rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{k_y \rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{k_z \rho}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \quad (8)$$

Finalmente, la adición de la ecuación de estado en la Ec. (8), trae como resultado la ecuación de difusividad. Para obtener esta ecuación para líquidos, se parte de la definición del factor de compresibilidad isotérmica. Este factor, se define como el cambio en volumen de fluido por cambio unitario de presión por volumen unitario. En forma analítica puede escribirse,

$$c = - \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} \right]_T$$

o en función de densidad puede escribirse,

$$c = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_T$$

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$c(p-p_0) = \ln \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right] \quad (9)$$

$$\rho = \rho_0 e^{c(p-p_0)} \quad (10)$$

La Ec.(9) es la ecuación de estado para un fluido de compresibilidad constante. Estrictamente, el factor de compresibilidad es función de presión, pero para líquidos es razonable suponer el factor de compresibilidad,  $c$ , constante dentro del intervalo de presión de interés.

De la Ec.(9), puede escribirse,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Efectuando las derivadas indicadas en la Ec.(8), sustituyendo los valores de la Ec.(11), considerando la viscosidad constante y despreciando las fuerzas de la gravedad, puede escribirse,

$$\left[ k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] + c \left[ k_x \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial k_z}{\partial z} \right] = \phi \mu c \frac{\partial p}{\partial t} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (12)$$

Si además,  $c$  es un valor pequeño (en el orden de  $10^{-6}$  lpc $^{-1}$ ), el medio es isotrópico, es decir, la permeabilidad y porosidad constantes en cualquier parte del sistema y los gradientes de presión son lo suficientemente pequeños para que los términos al cuadrado puedan despreciarse, la Ec.(12) puede escribirse,

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (13)$$

Esta es una de las formas más conocidas de la ecuación de difusividad que gobierna el flujo de una sola fase a través de un medio poroso, expresada en coordenadas cartesianas y flujo en tres direcciones. La solución de esta ecuación permite obtener la distribución de presión como función de las tres direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y a un tiempo  $t$ , cualesquiera.

Si el flujo es lineal, es decir, ocurre sólo en una sola dirección, por ejemplo, en un plano horizontal, los términos en  $z$  e  $y$  son iguales a cero, y la ecuación de difusividad en este caso será,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (14)$$

Esta es la ecuación básica aplicada a sistemas lineales de intrusión de agua, como se verá más adelante.

### Coordenadas Radiales

Quizás de más uso en ingeniería de petróleo sea la ecuación de difusividad escrita para un sistema radial ortogonal, ya que

el flujo (o inyección) en un pozo que penetra completamente la formación sigue condiciones de flujo radial. Para deducir tal ecuación en un sistema radial, puede partirse de la Ec.(13) en coordenadas cartesianas y usando métodos puramente matemáticos (operador de Laplace, etc), se hace la transformación al sistema radial. Sin embargo, puede hacerse una deducción semejante a la anterior para coordenadas cartesianas. La Fig.6 ilustra un elemento del medio poroso en un sistema radial. El flujo se considera horizontal y radial en la misma dirección en que aumenta  $r$ ,

Si  $u_r$  es la velocidad volumétrica de flujo radial, el flujo de masa por área unitaria será  $(\rho u_r)$ . En forma similar a la deducción anterior, la masa que entra al elemento a través del área lateral del cilindro de radio,  $r$ , durante un instante de observación,  $\Delta t$ , será,

$$(\rho u_r) (2\pi r h) (\Delta t)$$

y la cantidad de masa que sale del elemento a través del área lateral del cilindro de radio,  $(r+\Delta r)$ , será,

$$[\rho u_r + \Delta(\rho u_r)] [2\pi(r+\Delta r)h] (\Delta t)$$

Por tanto, asumiendo que no sale ni entra masa al elemento a través de fuentes o sumideros, la cantidad neta de masa que se acumula en el elemento durante el instante de observación  $\Delta t$ , será la diferencia de lo que entra, menos lo que sale ,

$$2\pi h [\rho u_r r - [\rho u_r + \Delta(\rho u_r)] (r+\Delta r)] \Delta t \quad (15)$$

Por otro lado, la acumulación de masa en el elemento durante el instante de observación  $\Delta t$ , puede obtenerse en forma diferente.

A un tiempo  $t$  cualesquiera, la masa de fluido en el elemento es,

$$\left. (\theta r \Delta r)(h)(\phi)(\rho) \right\}_t$$

y a un tiempo  $(t+\Delta t)$ , la masa de fluido en elemento será,

$$\left. (\theta r \Delta r)(h)(\phi)(\rho) \right\}_{t+\Delta t}$$

por lo tanto, la acumulación de masa durante el instante  $\Delta t$ , será la cantidad de masa al tiempo  $(t+\Delta t)$  menos la cantidad de masa al tiempo  $t$ ,

$$\left. (\theta r \Delta r)(h)(\phi)(\rho) \right\}_{t+\Delta t} - \left. (\theta r \Delta r)(h)(\phi)(\rho) \right\}_t \quad (16)$$

Las Ecs.(15) y (16) individualmente representan la acumulación de masa en el elemento durante el instante  $\Delta t$ . Igualándolas, eliminando  $\theta h$  de ambos lados, efectuando y transponiendo términos, puede escribirse,

$$-\frac{1}{r \Delta r} \left[ \rho u_r \Delta r + r \Delta(\rho u_r) + \Delta r \Delta(\rho u_r) \right] = \frac{\phi \rho \big|_{t+\Delta t} - \phi \rho \big|_t}{\Delta t} \quad (17)$$

ya que el producto de los términos  $(\Delta r)(\Delta(\rho u_r))$  es muy pequeño, puede considerarse igual a cero y la ecuación anterior puede escribirse,

$$\frac{1}{r} \left[ \rho u_r + r \frac{\Delta(\rho u_r)}{\Delta r} \right] = - \frac{\Delta(\phi \rho)}{\Delta t} \quad (18)$$

tomando el límite, cuando  $\Delta r$  y  $\Delta t$  tienden a cero, puede escribirse,

$$\frac{1}{r} \left[ \rho u_r + \frac{\partial(\rho u_r)}{\partial r} \right] = - \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho) \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \quad (20)$$

Esta es la ecuación de continuidad para flujo radial. Si en esta ecuación se reemplaza la ecuación para la velocidad volumétrica de flujo,  $u_r$ , dada por Darcy,

$$u_r = - \frac{k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (21)$$

resulta,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \phi k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \quad (22)$$

Finalmente, introduciendo la ecuación de estado para líquidos, Ec.(9), en su forma diferencial respecto a  $r$ , se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{k_r} \frac{\partial k_r}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + c \left[ \frac{\partial p}{\partial r} \right]^2 &= \frac{\phi \mu c}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t} + \\ &+ \frac{\mu}{k_r} \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (23)$$

Si se asume un medio isotrópico, es decir, que la permeabilidad y porosidad sean constantes en cualquier parte y dirección del sistema, se puede escribir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c \left[ \frac{\partial p}{\partial r} \right]^2 &= \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + c \left[ \frac{\partial p}{\partial r} \right]^2 = \\ &= \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (24)$$

Si además, se considera el valor de  $c$  pequeño (en el orden de  $10^{-6}$  lpc-1) y por otra parte puede asumirse un gradiente de presión peque



no en cualquier parte del yacimiento, el término  $c(\partial p / \partial r)$ , puede considerarse igual a cero. En este caso, la ecuación resultante es,

$$\left[ \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (25)$$

Esta expresión es comunmente conocida como ecuación de difusividad para líquidos de baja compresibilidad.

Debe tenerse en mente las suposiciones que incluyen las ecuaciones deducidas, Ecs.(13) y (25): sistema isotrópico con porosidad y permeabilidad constantes, viscosidad del fluido constante, no se consideran las fuerzas de la gravedad, flujo viscoso, compresibilidad pequeña y constante, gradiente pequeño a través del sistema y una sola fase. Ecuaciones similares pueden deducirse<sup>18</sup> para otros fluidos (gases) y cuando ocurre flujo de dos o tres fases (petróleo, agua, gas).

#### SOLUCIONES DE LA ECUACION DE DIFUSIVIDAD APLICADA A ACUIFEROS

Las soluciones de las ecuaciones de difusividad aplicadas a sistemas yacimiento-acuífero más comunmente conocidas, se refieren a la solución de las Ecs.(14) y (25), o sea modelos lineales y radiales homogéneos en una sola dimensión y donde fluye una sola fase. Con el uso de computadores digitales, día a día se incorporan a la literatura petrolera soluciones particulares (modelos) de las ecuaciones de difusividad en diferentes formas: una, dos y tres dimensiones, una dos y tres fases y cambio en propiedades, tales como porosidad, permeabilidad, espesor, etc. En estas notas, se cubrirán las principales soluciones de las Ecs.(14) y (25) existentes en la literatura, para sistemas homogéneos y una sola fase y otras soluciones variando una o algunas de las propiedades tales como porosidad, permeabilidad, espesor, y

compresibilidad.

### Acuíferos Lineales Homogéneos.

Como se mencionó anteriormente en la sección de Generalidades, algunas veces en la práctica, la geometría de un sistema yacimiento-acuífero se aproxima mejor a un sistema lineal que a un sistema radial, principalmente cuando el sistema está limitado por fallas. La ecuación aplicable en tal sistema es la Es.(14),

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (14)$$

Con el fin de determinar las diferentes soluciones de esta ecuación, es necesario fijar primero el tamaño del sistema (acuífero), como también las condiciones iniciales y las condiciones de límite (contorno). Los tipos generales de soluciones, se refieren a acuíferos infinitos y a acuíferos finitos (limitados). Luego, a su vez, para cada tipo existen varias soluciones, de acuerdo a las condiciones iniciales y de límite. La Fig.9 presenta esquemáticamente las condiciones de límite de las soluciones principales del sistema yacimiento-acuífero lineal, según los modelos representados en las Figs.7 y 8. La Fig.9 resume seis soluciones: dos para acuíferos infinitos y cuatro para acuíferos finitos. En ambos casos, deben especificarse, tanto las condiciones iniciales, como las condiciones de límite.

Condiciones Iniciales.- Tanto en acuíferos infinitos como en acuíferos finitos, la condición inicial, es decir cuando el tiempo,  $t=0$ , considera una presión inicial,  $p_i$ , constante para todo valor de  $x$ . Analíticamente,  $p(x,0) = p_i$ .

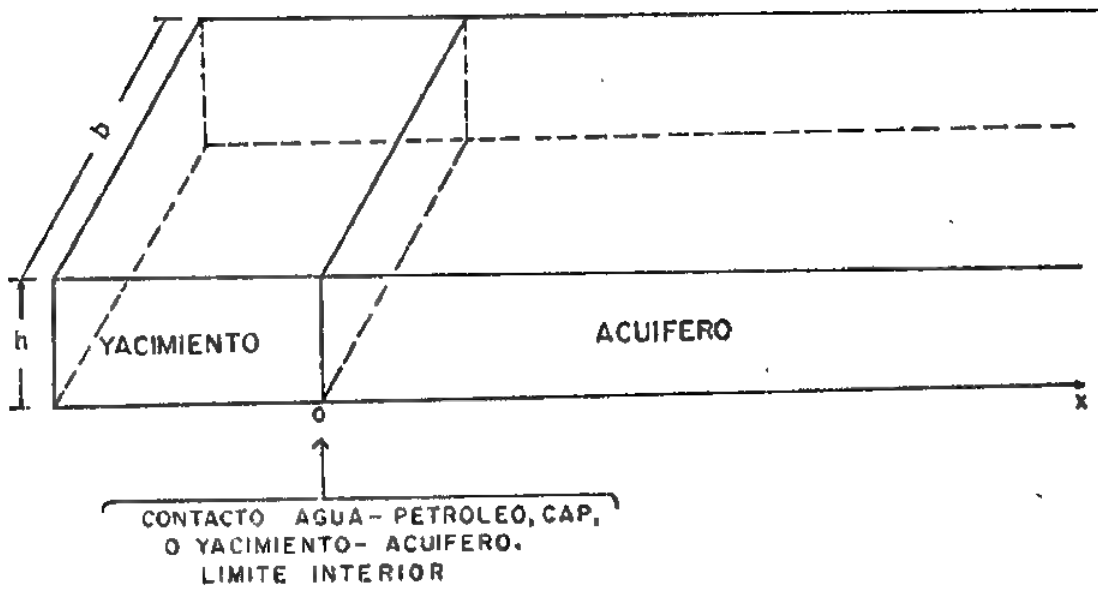


Fig. 7 - Sistema lineal yacimiento - acuífero infinito

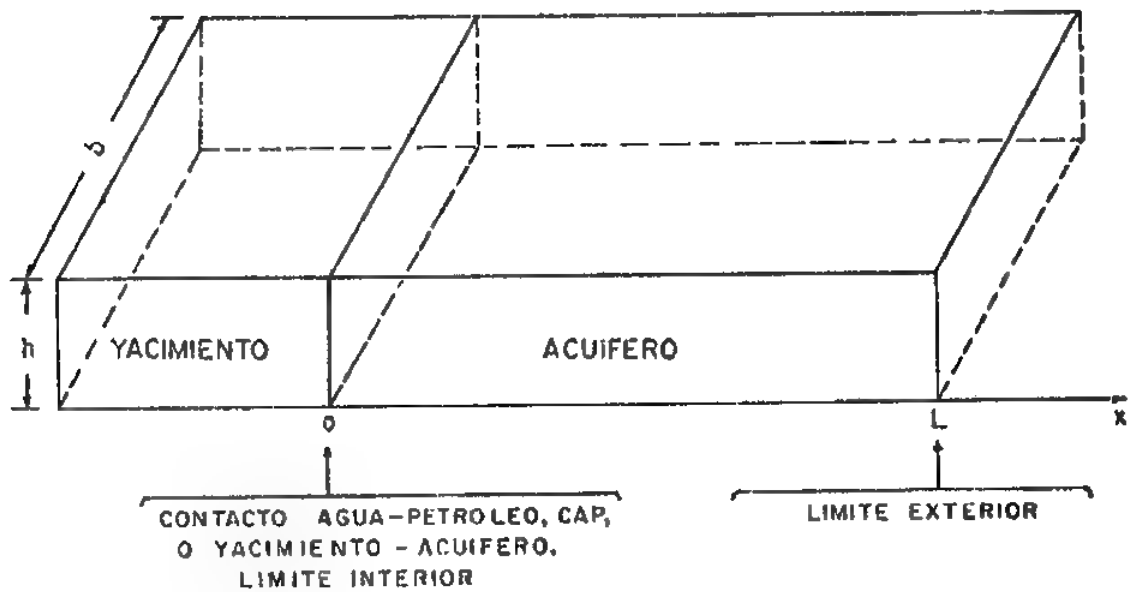


Fig. 8 - Sistema lineal yacimiento - acuífero finito.

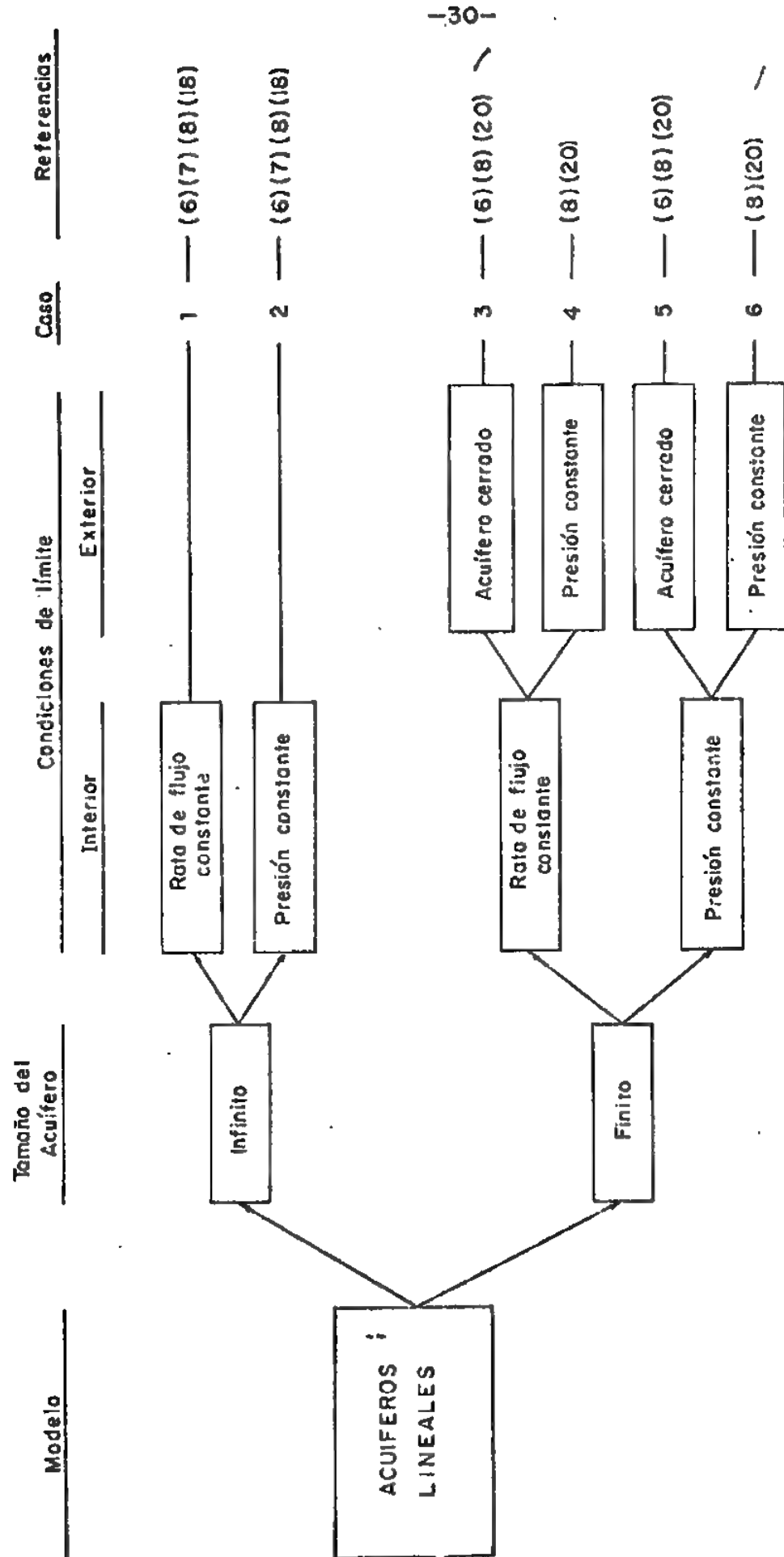


Fig. 9 —Soluciones de la ecuación de difusividad para acuíferos lineales.

Condiciones de Límite (Contorno).-

I - Acuíferos Infinitos

Caso 1 - Rata de intrusión constante en el contacto agua-petroleo (acuifero-yacimiento). Es el denominado Caso de Rata Terminal Constante. Analíticamente, las condiciones de límite son:\*

$$a) (e)_{cap} = \text{constante} = \frac{kbh}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{cap} \text{ para } t > 0$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{cap} = \frac{e\mu}{kbh} = \text{constante, para } t > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0, t) = \frac{e\mu}{kbh}$$

$$b) p \rightarrow p_i \text{ cuando } L \rightarrow \infty \text{ todo } t.$$

$$p(\infty, t) = p_i$$

Caso 2 - Presión constante en el contacto agua-petróleo (acuifero-yacimiento). Es el denominado Caso de Presión Terminal Constante. Analíticamente, las condiciones de límite son,

$$a) (p)_{cap} = \text{constante, para } t > 0$$

\* En las ecuaciones cubiertas en este estudio, e expresa la rata de intrusión de agua al yacimiento,  $dW_e/dt$ . De acuerdo a la nomenclatura de la AIME<sup>17</sup>, debe ser  $e_w$ , pero para presentar las ecuaciones más simplificadas se usa simplemente e. Cuando se trata de un sistema de un yacimiento que fluye a un pozo, en lugar de e se usa q. En forma similar se usa  $\mu$  y  $k$  en lugar de  $\mu_w$  y  $k_w$ . El significado de cap es: contacto agua-petróleo.

$$(\Delta p)_{cap} = (p_i - p)_{cap} = \text{constante, para } t > 0.$$

$$p(0, t) = \text{constante}$$

$$\Delta p(0, t_D) = \text{constante}$$

b) Igual que la Condición b) del Caso 1

## II - Acuíferos Finitos (Limitados), $x=L$

Caso 3 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 1

b)  $(e)_L = 0$  para todo  $t$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \text{ para todo } t$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L, t) = 0$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)(L, t_D) = 0$$

Caso 4 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y presión constante en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 1

b)  $p = p_i$  para  $x=L$  y para todo  $t$

$$p(L, t) = p_i$$

$$p(L, t_D) = p_i$$

Caso 5 - Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente, las condiciones de límite son:

- a) Igual a la Condición a) del Caso 2
- b) Igual a la Condición b) del Caso 3

Caso 6 - Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo), lo mismo que en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

- a) Igual a la Condición a) del Caso 2
- b) Igual a la Condición b) del caso 4,

Varios autores <sup>7, 8, 9, 19, 20, 21</sup> han estudiado uno o varios de los casos descritos. Entre ellos, Nabor y Barham<sup>9</sup> presentan en forma muy práctica soluciones de la Ec.(14) para los seis casos considerados en acuíferos homogéneos. Tales soluciones se presentan a continuación.

Caso 1:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{e\mu}{kbh} \left[ 2 \sqrt{\frac{kt}{\pi\phi\mu c}} \right] \quad (26)$$

Caso 2:

$$W_e = \phi b h c (\Delta p) \left[ 2 \sqrt{\frac{kt}{\pi\phi\mu c}} \right] \quad (27)$$

Caso 3:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{e\mu}{kbh} \left[ \left( \frac{L}{3} + \frac{kt}{\phi\mu c L} \right) - \frac{2L}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 r^2 kt}{\phi\mu c L^2}} \right]$$

donde  $n = 1, 2, 3, 4, \dots \infty$

Caso 4:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{e\mu}{kbh} \left[ L - \frac{8L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{4\phi\mu cL^2}} \right] \quad (29)$$

donde  $n$  es impar,  $n = 1, 3, 5, \dots \infty$

Caso 5:

$$W_e = \phi b h c (\Delta p) \left[ L - \frac{8L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{4\phi\mu cL^2}} \right] \quad (30)$$

donde  $n$  es impar,  $n = 1, 3, 5, \dots \infty$

Caso 6:

$$W_e = \phi b h c (\Delta p) \left[ \left( \frac{L}{3} + \frac{kt}{\phi\mu cL} \right) - \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{\phi\mu cL^2}} \right] \quad (31)$$

donde  $n = 1, 2, 3, 4, \dots \infty$

Las ecuaciones anteriores pueden simplificarse bastante, si se introduce el término tiempo adimensional, definido por,

$$t_D = \frac{0,006323kt}{\phi\mu cL^2}$$

donde los términos se expresan en unidades prácticas:  $k=\text{md}$ ;  $t=\text{días}$ ;  $\phi=\text{fracción}$ ;  $\mu=\text{cp}$ ;  $c = \text{vol/vol/lpc}$ ;  $L=\text{pies}$ . El término  $L$ , para acuí



ros infinitos, puede tomarse un valor cualesquiera. Podría tomarse un valor imitativo para simplificar los cálculos. En el caso de acuíferos finitos, (limitados), el valor de L es la longitud del acuífero. Además si se definen los siguientes factores  $F_k(t_D)$  donde  $k = 0, 1/2, 1$ ,

$$F_0(t_D) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 t_D}{4}} \quad (32)$$

donde  $n = 1, 3, 5 \dots \infty$

$$F_{1/2}(t_D) = 2 \sqrt{\frac{t_D}{\pi}} \quad (33)$$

$$F_1(t_D) = (t_D + \frac{1}{3}) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t_D} \quad (34)$$

donde  $n = 1, 2, 3, 4, \dots \infty$

Las Ecs.(26) a (31), en unidades prácticas, pueden escribirse,

Caso 1:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 \text{ euL}}{kbh} F_{1/2}(t_D) \quad (26a)$$

Caso 2:

$$W_e = \frac{\phi b h L c (\Delta p)}{5,615} F_{1/2}(t_D) \quad (27a)$$

Caso 3:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 \text{ euL}}{kbh} F_1(t_D) \quad (28a)$$

Caso 4:

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 \text{ euL}}{kbh} F_0(t_D) \quad (29a)$$

Caso 5:

$$W_e = \frac{\phi b h L c (\Delta p)}{5,615} F_0(t_D) \quad (30a)$$

Caso 6:

$$W_e = \frac{\phi b h L c (\Delta p)}{5,615} F_1(t_D) \quad (31a)$$

Es interesante hacer un análisis de las funciones  $F_k(t_D)$  Ecs. (32) a (34). Cuando  $t_D$  tiende a cero ( $t_D \rightarrow 0$ ), la sumatoria de la Ec. (32) tiende a la suma de  $1/n^2$  ( $n = 1, 3, 5, \dots \infty$ ), cuyo valor es  $\pi^2/8$ . Por tanto, el valor de  $F_0(t_D) = 0$ , cuando  $t_D \rightarrow 0$ . Cosa similar ocurre con la Ec. (34), ya que la sumatoria de  $1/n^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots \infty$ ) es  $\pi^2/6$  es decir,  $F_1(t_D) = 0$ , cuando  $t_D \rightarrow 0$ . La Ec. (33), de hecho es cero, cuando  $t_D \rightarrow 0$ .

De otro lado, cuando  $t_D \rightarrow \infty$ ,  $F_0(t_D) \rightarrow 1,0$  y  $F_1(t_D) \rightarrow (t_D + \frac{1}{3})$  es decir, llegan a ser lineales con  $t_D$ , lo que es de esperarse si se analizan las condiciones de límite de los acuíferos finitos. Por ejemplo, para el Caso 3, la caída de presión llega a ser lineal con tiempo tan pronto se alcance flujo semi-continuo, o sea para valores de tiempo (Fig. 3), después que el disturbio debido a la intrusión, llegue al límite exterior.

Para valores pequeños de  $t_D$ ,  $F_0(t_D)$  y  $F_1(t_D)$  se acercan y llegan a ser iguales al valor de  $F_{1/2}(t_D)$ , tal como es de esperarse, ya que sistemas limitados se comportan como infinitos para valores peque-

nos de  $t_D$ . Tal cosa puede observarse en la Tabla I, donde se tabulan los valores de  $F_k(t_D)$  para  $t_D$  entre 0,01 y 9,0. Además la Fig.10, presenta gráficamente los valores de  $F_k(t_D)$  para  $t_D$  entre 0,02 y 10,0. De esta figura, puede observarse que el valor de las funciones  $F_0(t_D)$  y  $F_1(t_D)$  comienzan a desviarse del valor de la función  $F_{1/2}(t_D)$ , para tiempos adimensionales mayores de  $t_D = 0,25$ . En general, pueden usarse las siguientes reglas:

1) si  $t_D \leq 0,25$ :

$$F_0 = F_{1/2} = F_1 = 2 \sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = 1,1284 \sqrt{t_D}$$

2) Si  $0,25 \leq t_D \leq 2,5$ :

Usar Tabla I o Fig.10 para  $F_0$  y  $F_1$ . Para  $F_{1/2}$  usar la Ec.(33).

3) Si  $t_D \geq 2,5$ :

$$F_0 = 1,0$$

$$F_1 = t_D + \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones presentadas para acuíferos lineales, se aplican bien sea para  $e$  o  $\Delta p$  constantes según el caso. El valor de  $e$  es la rata de intrusión de agua en el contacto agua-petróleo y en algunos casos puede considerarse igual a la rata de producción de petróleo,  $q$ , en BY/D, especialmente en acuíferos muy activos y cuando la presión del campo aún está por encima del punto de burbujeo. Si el valor de  $e$  o  $(\Delta p)$  varían con tiempo, es necesario aplicar el principio de superposición de efectos, el que discutirá más adelante y donde se presentarán las ecuaciones correspondientes.

TABLA I - Valores de las Funciones  $F_k(t_D)$  para Acuífero Lineales Valores  $t_D$  entre 0,01 y 9,0.(Referencia 9). Fig. 10.

$t_D$	$F_0(t_D)$	$\frac{F_1}{2}(t_D)$	$F_1(t_D)$	$t_D$	$F_0(t_D)$	$\frac{F_1}{2}(t_D)$	$F_1(t_D)$
0,0100	0,1128379	0,1128379	0,1128379	0,31	0,6226824	0,6282549	0,6338276
0,0110	0,1183454	0,1183454	0,1183454	0,35	0,6581891	0,6675581	0,6769283
0,0125	0,1261566	0,1261566	0,1261566	0,40	0,6978819	0,7136496	0,7294231
0,0140	0,1335116	0,1335116	0,1335116	0,45	0,7329537	0,7569398	0,7809461
0,0160	0,1427299	0,1427299	0,1427299	0,50	0,7639503	0,7978846	0,8318760
0,0180	0,1513880	0,1513880	0,1513880	0,56	0,7964332	0,8444016	0,8925272
0,0200	0,1595769	0,1595769	0,1595769	0,62	0,8244456	0,8884866	0,9528875
0,0225	0,1692569	0,1692569	0,1692569	0,70	0,8558930	0,9440695	1,0331309
0,0250	0,1784124	0,1784124	0,1784124	0,80	0,8874029	1,0092530	1,1332578
0,0280	0,1888139	0,1888139	0,1888139	0,90	0,9120299	1,0704744	1,2333052
0,0310	0,1986717	0,1986717	0,1986717	1,00	0,9312597	1,128379	1,333323
0,0350	0,2111004	0,2111004	0,2111004	1,10	0,9462902	1,183454	1,433329
0,0400	0,2256758	0,2256758	0,2256758	1,25	0,9629049	1,261566	1,583332
0,0450	0,2393654	0,2393654	0,2393654	1,40	0,9743799	1,335116	1,733333
0,0500	0,2523133	0,2523133	0,2523133	1,60	0,9843590	1,427299	1,933333
0,0560	0,2670232	0,2670232	0,2670232	1,80	0,9904512	1,513880	2,133333
0,0620	0,2809641	0,2809641	0,2809641	2,00	0,9941705	1,595769	2,333333
0,0700	0,2985411	0,2985411	0,2985411	2,25	0,9968451	1,692569	2,583333
0,0800	0,3191537	0,3191537	0,3191537	2,50	0,9983024	1,784124	2,833333
0,0900	0,3385133	0,3385133	0,3385133	2,80	0,9991902	1,888139	3,133333
0,100	0,3568234	0,3568234	0,3568234	3,10	0,9996137	1,986717	3,433333
0,110	0,3742370	0,3742370	0,3742370	3,50	0,9998560	2,111004	3,833333
0,125	0,3989280	0,3989280	0,3989280	4,00	0,9999581	2,256758	4,333333
0,140	0,4221615	0,4221615	0,4221615	4,50	0,9999878	2,393654	4,833333
0,160	0,4512368	0,4512368	0,4512368	5,00	0,9999964	2,523133	5,333333
0,180	0,4784617	0,4784617	0,4784617	5,60	0,9999992	2,670232	5,933333
0,200	0,5040878	0,5040878	0,5040878	6,20	0,9999998	2,809641	6,533333
0,225	0,5341424	0,5341424	0,5341424	7,00	1,0000000	2,985411	7,333333
0,250	0,5622335	0,5622335	0,5622335	8,00	1,0000000	3,191538	8,333333
0,280	0,5936127	0,5936127	0,5936127	9,00	1,0000000	3,385138	9,333333

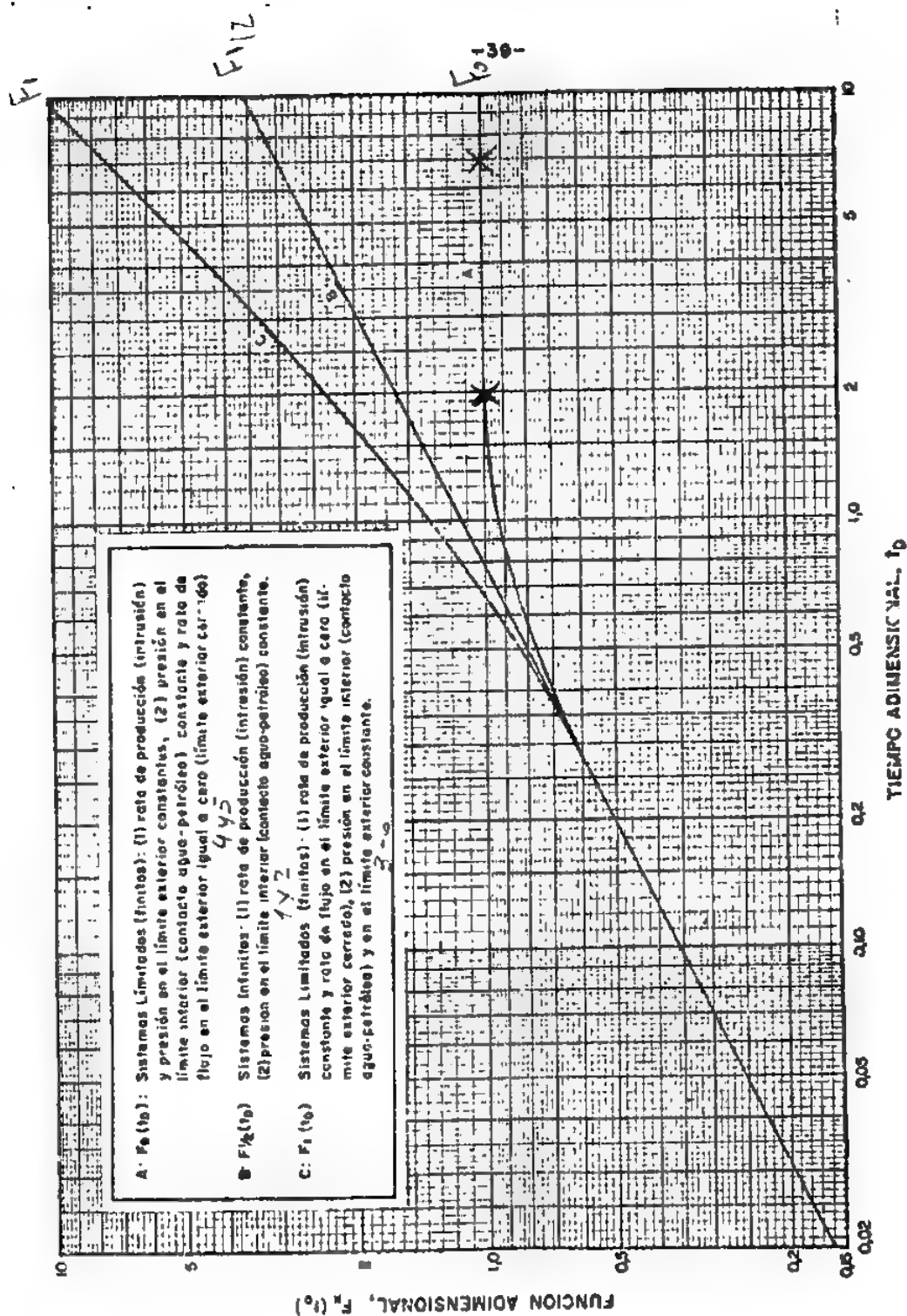


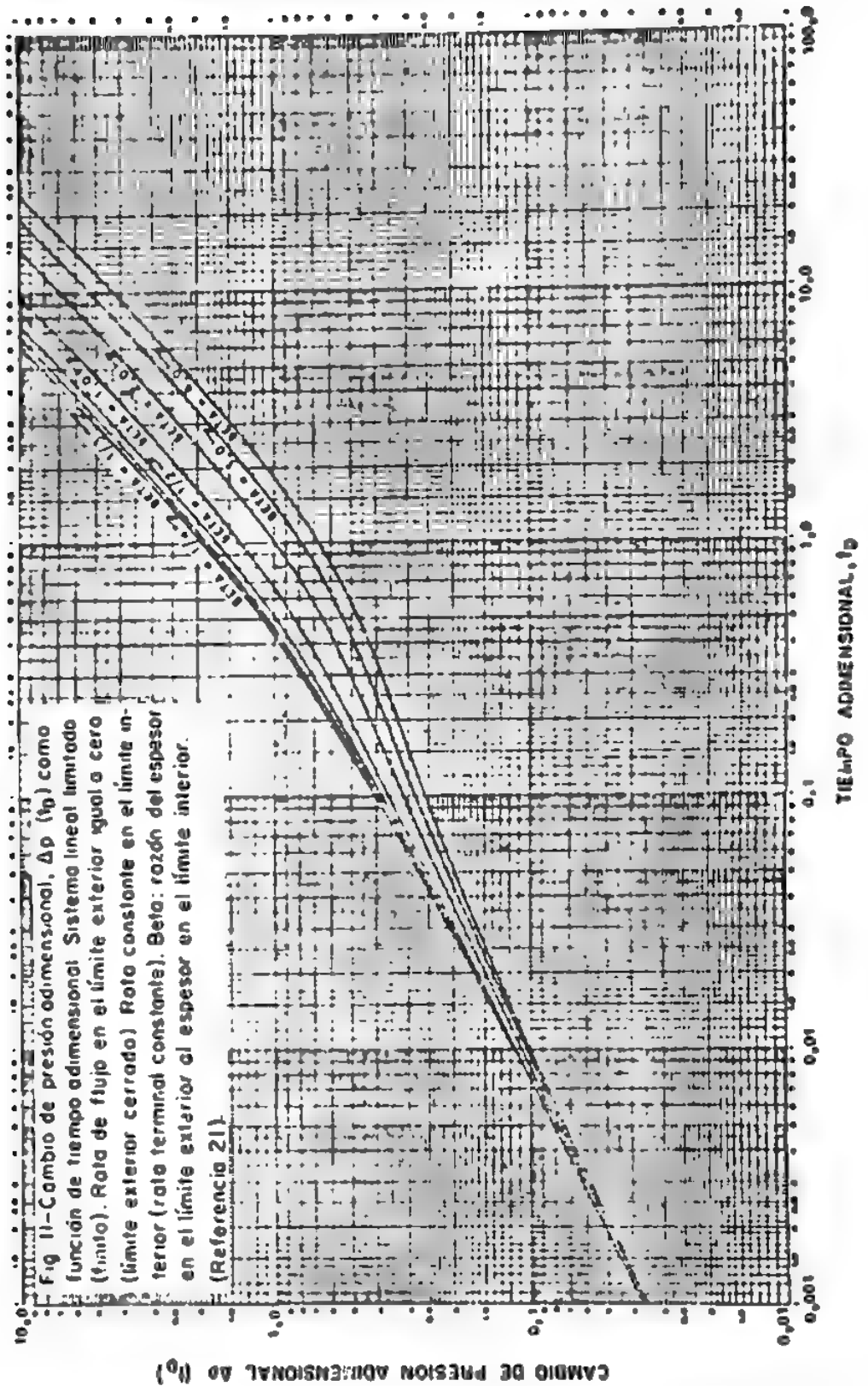
Fig. 10-Función adimensional,  $F_k(t_0)$ , contra tiempo adimensional,  $t_0$ , para sistemas lineales. (Referencia 9)

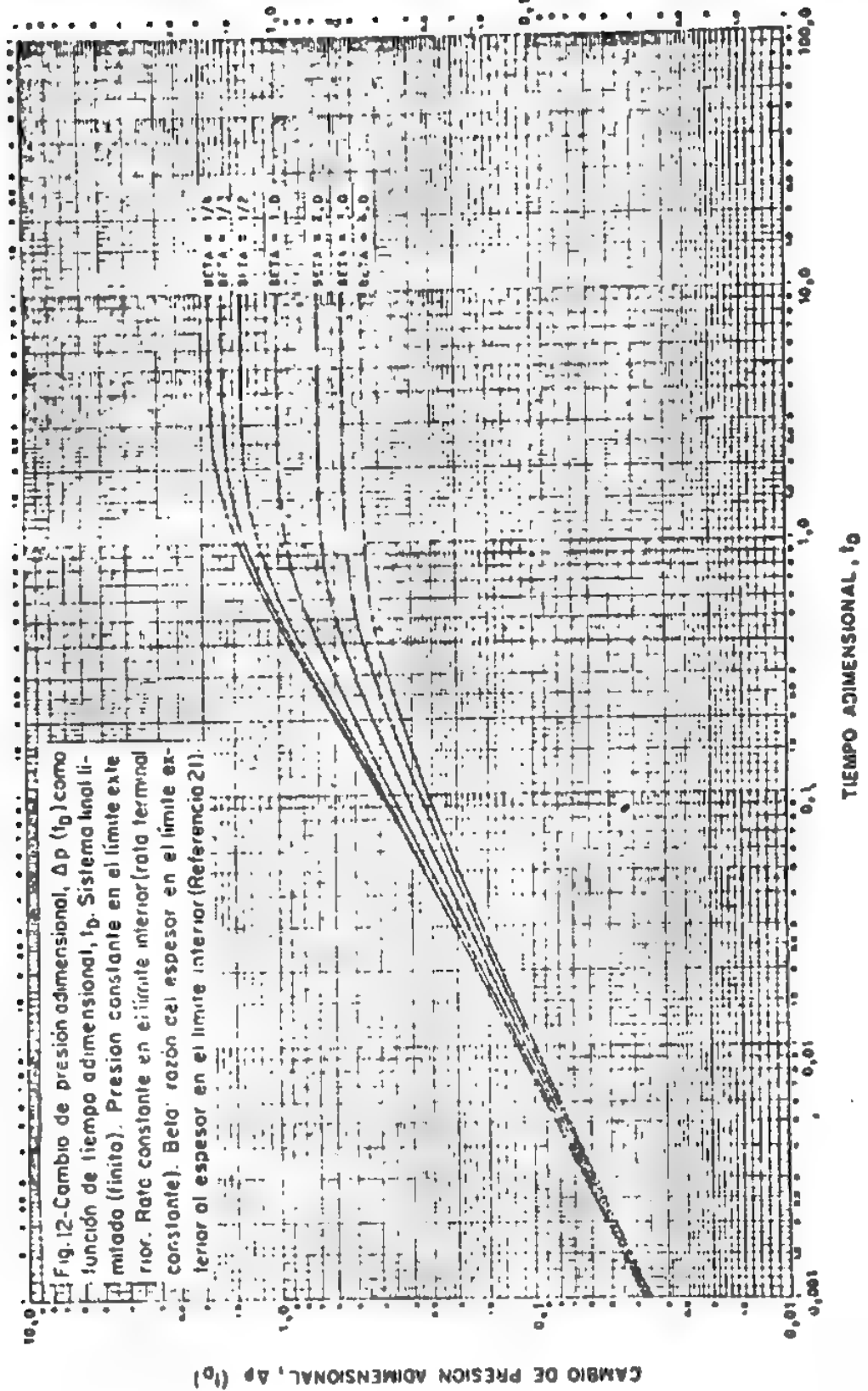
### Acuíferos Lineales No-Homogéneos.

Mueller<sup>21</sup> presenta soluciones de la ecuación de difusividad para acuíferos lineales con variación de las siguientes propiedades: espesor,  $h$ ; permeabilidad/viscosidad,  $k/\mu$  y (porosidad) $\times$ (compresibilidad),  $\phi c$ . Considera que estos factores varían linealmente con distancia a partir del límite interior del acuífero (exterior del yacimiento) hasta el límite exterior del mismo. En base a esto, define el factor beta,  $\beta$ , en la siguiente forma,

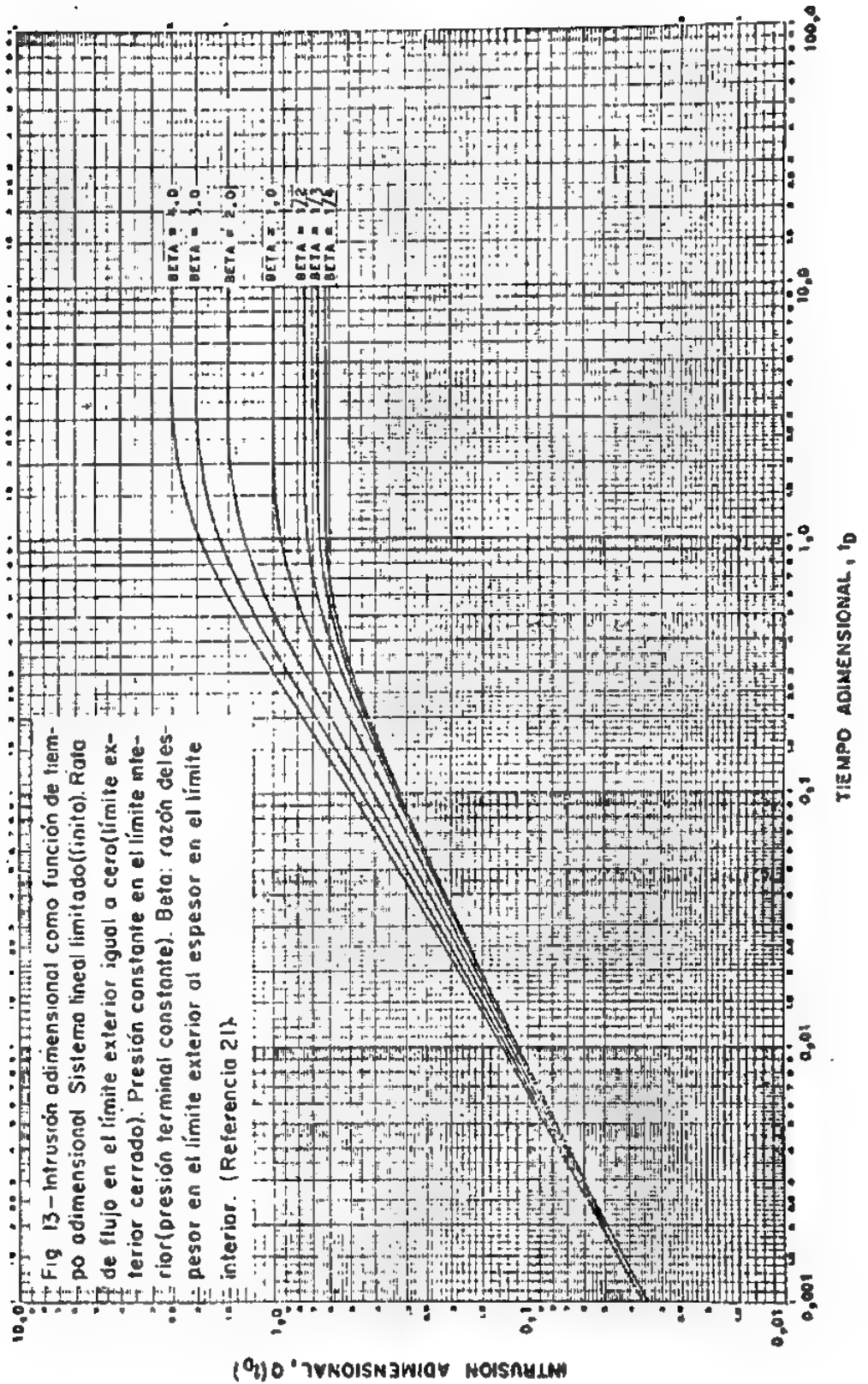
$$\beta = \frac{\text{Valor del factor variante en el límite exterior}}{\text{Valor del mismo factor variante en el límite interior}}$$

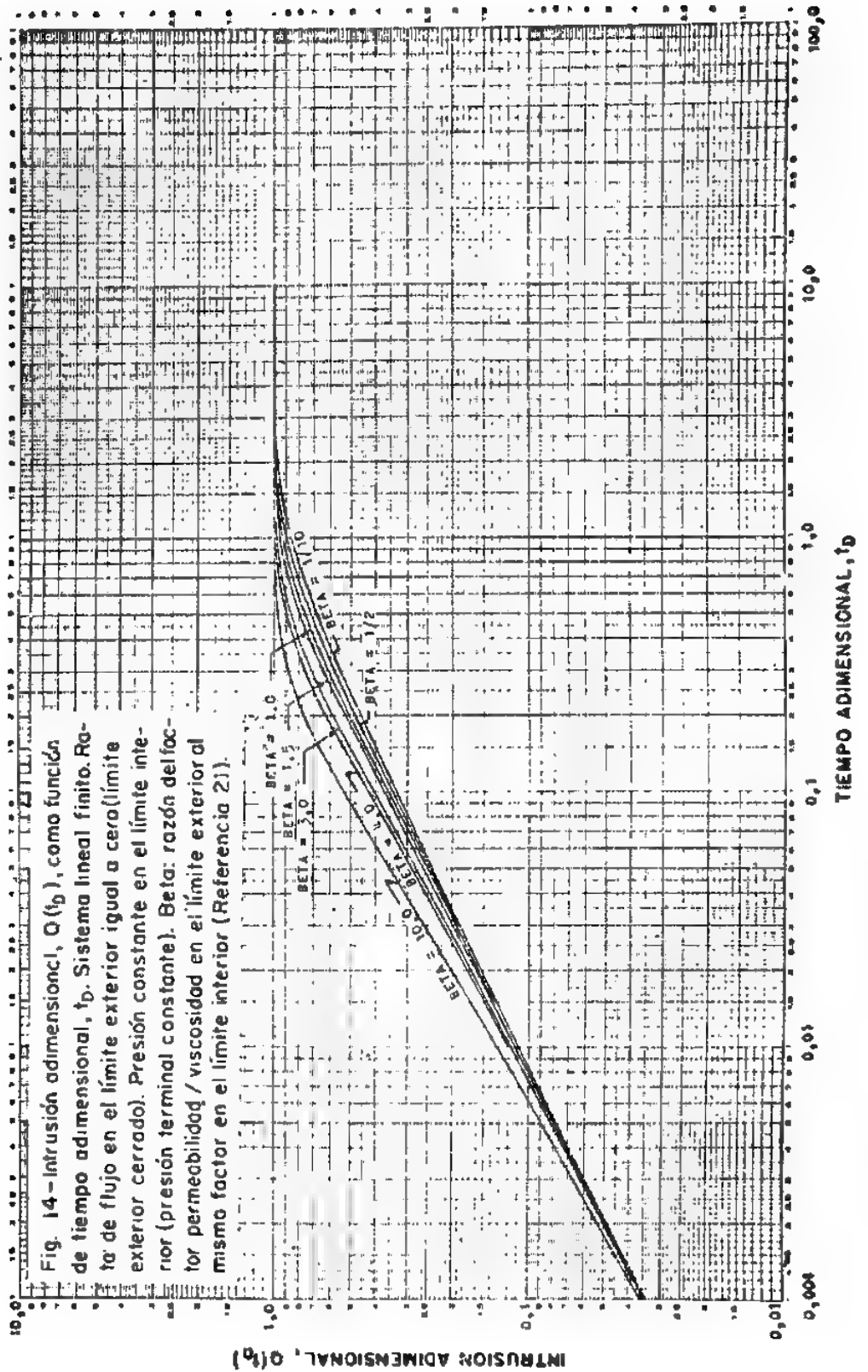
Los resultados para varios casos de acuíferos lineales finitos se presentan gráficamente en las Figs. 11 a 16. La Fig. 11 presenta la solución para las condiciones de límite del Caso 3, (Fig. 9), variando el espesor de acuerdo a los valores de  $\beta$  entre 0,25 y 4,0. Esta figura se usa para obtener el factor  $F_1(t_D)$  de la Ec. (28a) (definido en este caso como  $\Delta p(t_D)$  en función de  $t_D$ ). La Fig. 12 presenta la solución para las condiciones de límite del Caso 4, (Fig. 9) variando el espesor de acuerdo a los valores de  $\beta$  entre 0,25 y 4,0. Esta figura se usa para obtener el factor  $F_0(t_D)$  de la Ec. (29a) (definido también como  $\Delta p(t_D)$ ) en función de  $t_D$ . Las Figs. 13, 14 y 15 presentan la solución para las condiciones de límite del Caso 5, (Fig. 9), variando respectivamente el espesor, el factor  $k/\mu$  y el factor  $\phi c$ , de acuerdo a los valores de  $\beta$ , entre 0,25 y 4,0 para el espesor y entre 0,1 y 10,0 para los factores  $k/\mu$  y  $\phi c$ . Estas figuras se usan para obtener el factor  $F_0(t_D)$  de la Ec. (30a) (definido también como  $Q(t_D)$ ) en función de  $t_D$ . Finalmente, la Fig. 16 presenta la solución para las condiciones de límite del Caso 6, (Fig. 9),

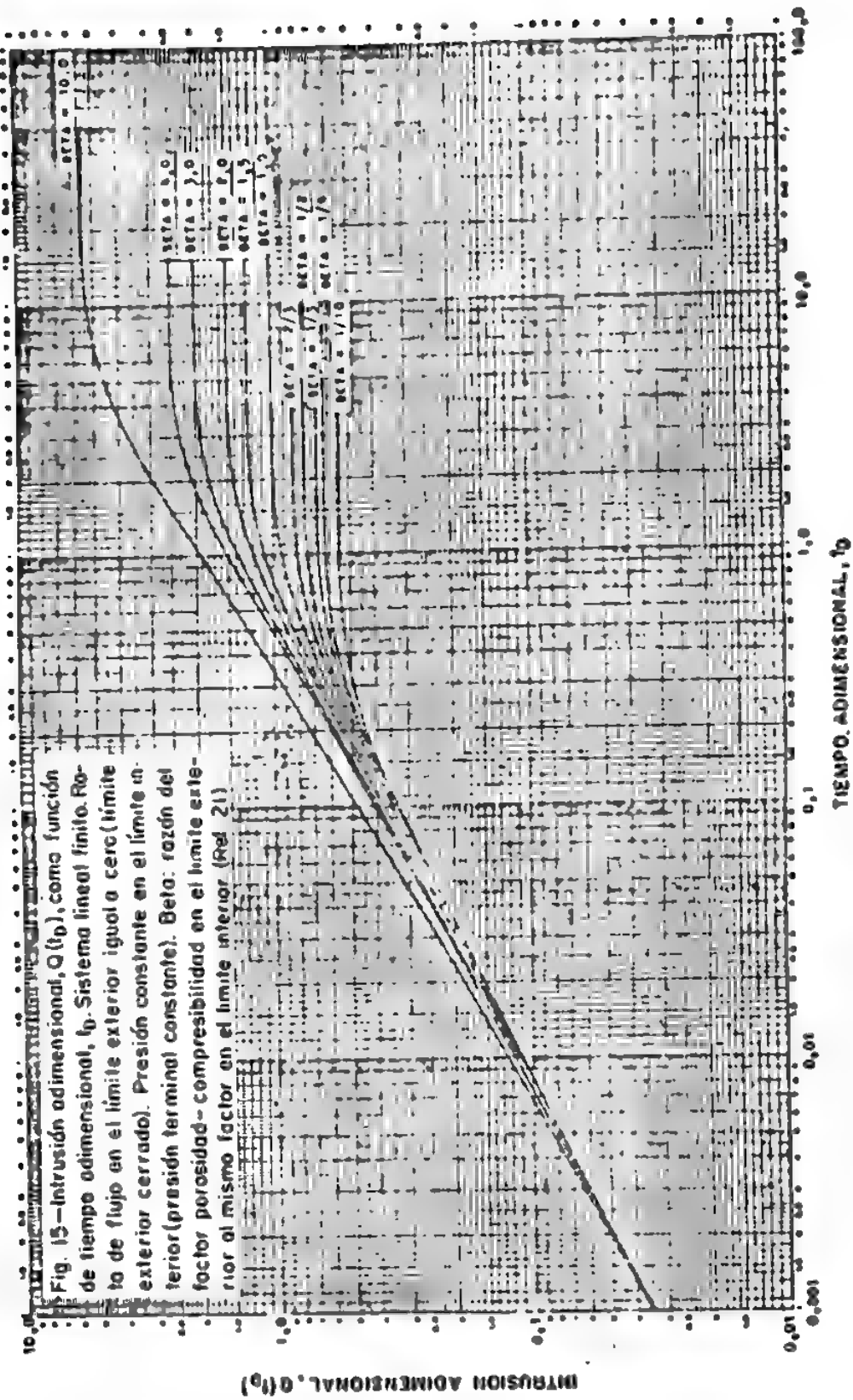


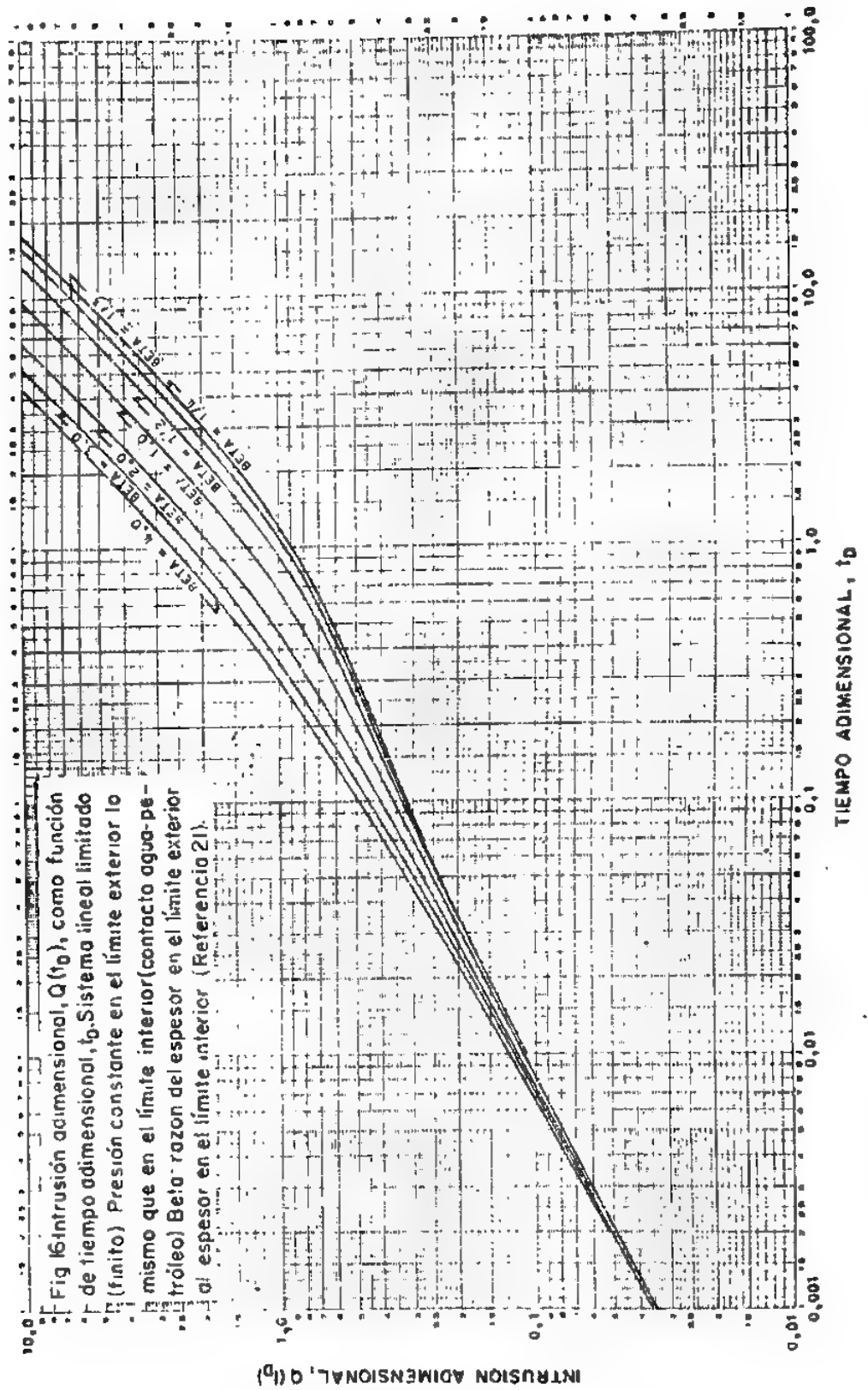












variando el espesor de acuerdo al valor de  $\beta$  entre 0,25 y 4,0. Esta figura se usa para obtener el factor  $F_1(t_D)$  de la Ec.(31a) (definido también como  $Q(t_D)$  en función de  $t_D$ ).

Los resultados descritos, fueron obtenidos por medio de computadores digitales de alta velocidad usando una solución numérica (diferencias finitas) de la ecuación de difusividad para acuíferos lineales. Debe tenerse en cuenta que al variar  $k/\mu$ , puede simplemente variarse individualmente la permeabilidad, la viscosidad o ambos a la vez. Igual sucede con el producto  $\phi c$ , es decir, puede variarse la porosidad o la compresibilidad individualmente o ambos a la vez. Así por ejemplo, obsérvese el comportamiento de la Fig.14, de la cual puede decirse que para todas las posibles combinaciones de permeabilidad en que varía  $\beta$ , a determinado tiempo adimensional, se obtiene el mismo valor de la intrusión adimensional. Esto puede justificarse si se tiene en cuenta que su cambio en permeabilidad no varía el volumen total de agua disponible para intrusión; únicamente desplaza el eje del tiempo cuando el agua fluye del acuífero. También puede observarse que un sistema con  $\beta = 0,1$ , es decir, un sistema que disminuye 10 veces su permeabilidad hacia el límite exterior, la diferencia máxima de la intrusión adimensional respecto a la intrusión para un sistema homogéneo ( $\beta = 1,0$ ), es de un 25 por ciento, valor relativamente pequeño si se compara con el cambio es permeabilidad. Para un  $\beta = 10$ , es decir, el inverso del caso anterior, o sea que la permeabilidad aumenta a partir del límite interior, el cambio de la intrusión adimensional máxima respecto a un acuífero homogéneo es del 33 por ciento.

#### Acuíferos Radiales Homogéneos.

Este tipo se refiere a acuíferos marginales, donde el agua en

tra al yacimiento lateralmente y su movimiento puede aproximarse a flujo radial. Las Figs.1 a 4 representan esquemáticamente el modelo de flujo más común en este tipo de acuíferos. La solución más conocida para este tipo de acuíferos es el modelo resuelto analíticamente por van Everdingen y Hurst<sup>7</sup>. El modelo se cumple tanto para petróleo que fluye radialmente a un pozo, como para agua que fluye también radialmente a un yacimiento según lo indica la Fig.17, partes a y b. El espesor del acuífero,  $h$ , es pequeño comparado con el radio del yacimiento  $R_1$ . En ambos casos, se considera flujo horizontal radial y demás suposiciones de la Ec.(25),

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (25)$$

Generalmente, con el fin de resolver esta ecuación más fácilmente, se transforma en otra ecuación en función de radio y tiempo adimensionales,  $r_D$  y  $t_D$ , definidos en la Fig.17 y además un término de presión adimensional,

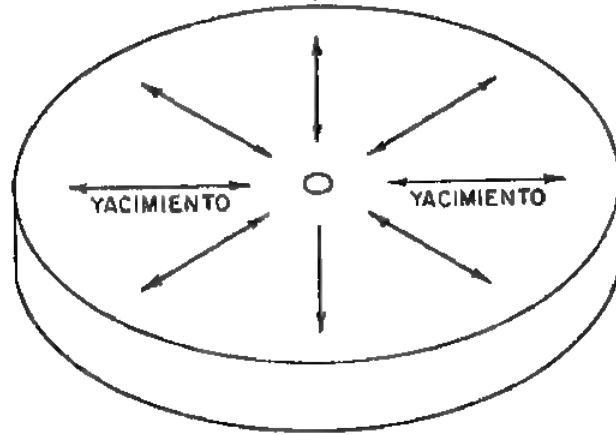
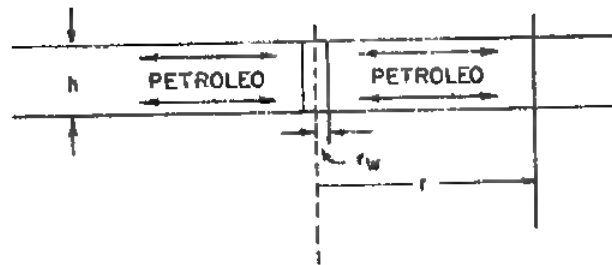
$$P = \Delta p(r_D, t_D) = \frac{(p_i - p)}{\frac{q\mu}{2\pi kh}} = \frac{(p_i - p)}{\frac{e\mu}{2\pi kh}} \quad (35)$$

donde  $q$  y  $e$  son las ratas de producción al pozo y rata de intrusión al yacimiento.

Introduciendo los términos  $r_D, t_D$  y  $P$  en la Ec.(35) resulta la siguiente ecuación adimensional para un sistema acuífero (o yacimiento) homogéneo,

$$\left| \frac{\partial^2 P}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P}{\partial r_D} = \frac{\partial P}{\partial t_D} \right. \quad (36)$$

En forma similar el caso de acuíferos lineales discutidos ante

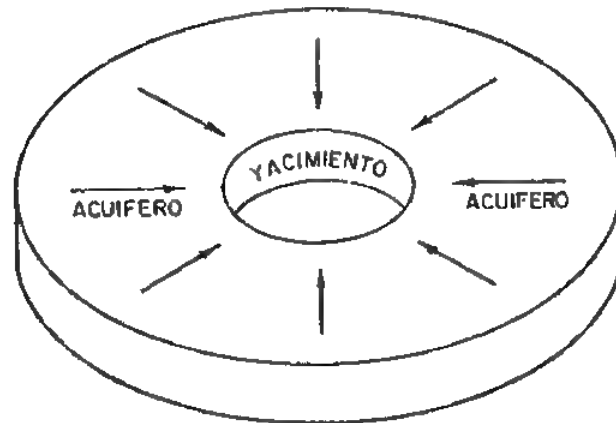
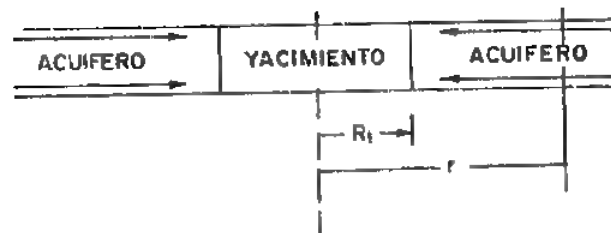


a)

PARAMETROS  
ADIMENSIONALES:

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{0,006323 K_o t}{\phi C_o \mu_o r_w^2}$$



b)

PARAMETROS  
ADIMENSIONALES:

$$r_D = \frac{r}{R_i}$$

$$t_D = \frac{0,006323 K_w t}{\phi C_w \mu_w R_i^2}$$

Fig. 17- Modelo radial para los cuales se ha resuelto la ecuación de difusividad: (a) yacimiento que fluye a un pozo, (b) acuífero que fluye a un yacimiento.

riormente, existen soluciones de esta ecuación de acuerdo al tamaño del acuífero (o yacimiento) y de acuerdo a las condiciones iniciales y de límite. La Fig.18 ilustra las condiciones de límite para los diferentes casos resueltos: dos para acuíferos (o yacimiento) infinitos y cuatro para finitos. Las condiciones iniciales y de límite para estos casos son:

Condiciones Iniciales. Tal como en acuíferos lineales, la condición inicial, tanto para acuíferos (o yacimientos) infinitos como finitos (limitados), considera una presión inicial constante,  $p_i$ , al tiempo  $t=0$  para todo valor de  $r$ . Analíticamente,

Unidades Dimensionales

$$p(r,0) = p_i$$

Unidades Adimensionales

$$\Delta P(r_D,0) = P(r_D,0) = 0$$

Condiciones de Límite (Contorno)- Las condiciones de límite o contorno se refiere a las condiciones impuestas al modelo en el límite interior (pozos, o contacto agua-petróleo) como en el límite exterior radio  $r_e$  si el modelo es finito o  $r_e \rightarrow \infty$  para el caso de modelos infinitos.

Los diferentes casos incluidos en la Fig.18 han sido ampliamente estudiados <sup>7,8,19,2,22,23,24,25,26,27</sup>. Entre estas referencias, una de las más conocidas para la solución de todos los casos, excepto el Caso 6, es el estudio de van Everdingen y Hurst<sup>7</sup>, vEH, resumida y ampliada luego Chatas<sup>8</sup>. Además, una sola solución general del Caso 1 ha sido obtenido principalmente por Mortada<sup>26</sup>, Theis<sup>23</sup> y otros <sup>25</sup>, <sup>26</sup> y el Caso 6 ha sido resuelto por Mueller<sup>21</sup>. A continuación se presentan las condiciones de límite y las respectivas soluciones para los



casos incluidos en la Fig. 18.

I Acuíferos Infinitos - En este tipo de sistema, existen dos casos: Rata Terminal Constante Presión Terminal Constante. Se han denominado Caso 1 y Caso 2 respectivamente en este estudio.

Caso 1 - Rata de intrusión constante en el contacto agua-petróleo (acuífero-yacimiento) o límite interior. En el límite exterior, la presión tiende a  $p_i$  cuando el radio tiende a infinito. Analíticamente, las condiciones de límite son:

Unidades Dimensionales

Unidades Adimensionales

a)  $e = \text{constante para } t > 0$

$$e = \frac{2\pi kh}{u} \left[ r \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{R_i} \text{ para } t > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(R_i, t) = \frac{eu}{2\pi kh R_i}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r_D}(1, t) = -1'$$

b)  $p \rightarrow p_i$  cuando  $r \rightarrow \infty$  para  $t > 0$

$$p(r, t) \rightarrow p_i, \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

$$p(r_D, t_D) \rightarrow \infty \text{ cuando } r_D \rightarrow \infty$$

Existen varias soluciones para este caso. Las más comunes son: (A) solución exacta de van Everdingen y Hurst<sup>7</sup>, que permite calcular la presión en el contacto agua-petróleo (o en el pozo), o sea a un radio  $R_i$  o  $r_w$  (o en unidades adimensionales a un radio  $r_D = 1$ ) y a cualquier tiempo  $t$ ; (B) solución del Integral Exponencial, Ei, o de Theis<sup>23</sup>, que permite calcular la presión a cualquier radio  $r$  o  $r_D$  y a cualquier tiempo  $t$ , y (C) solución de Mortada<sup>26</sup>, que también permite calcular la presión a cualquier radio  $r$  o  $r_D$  y a cualquier

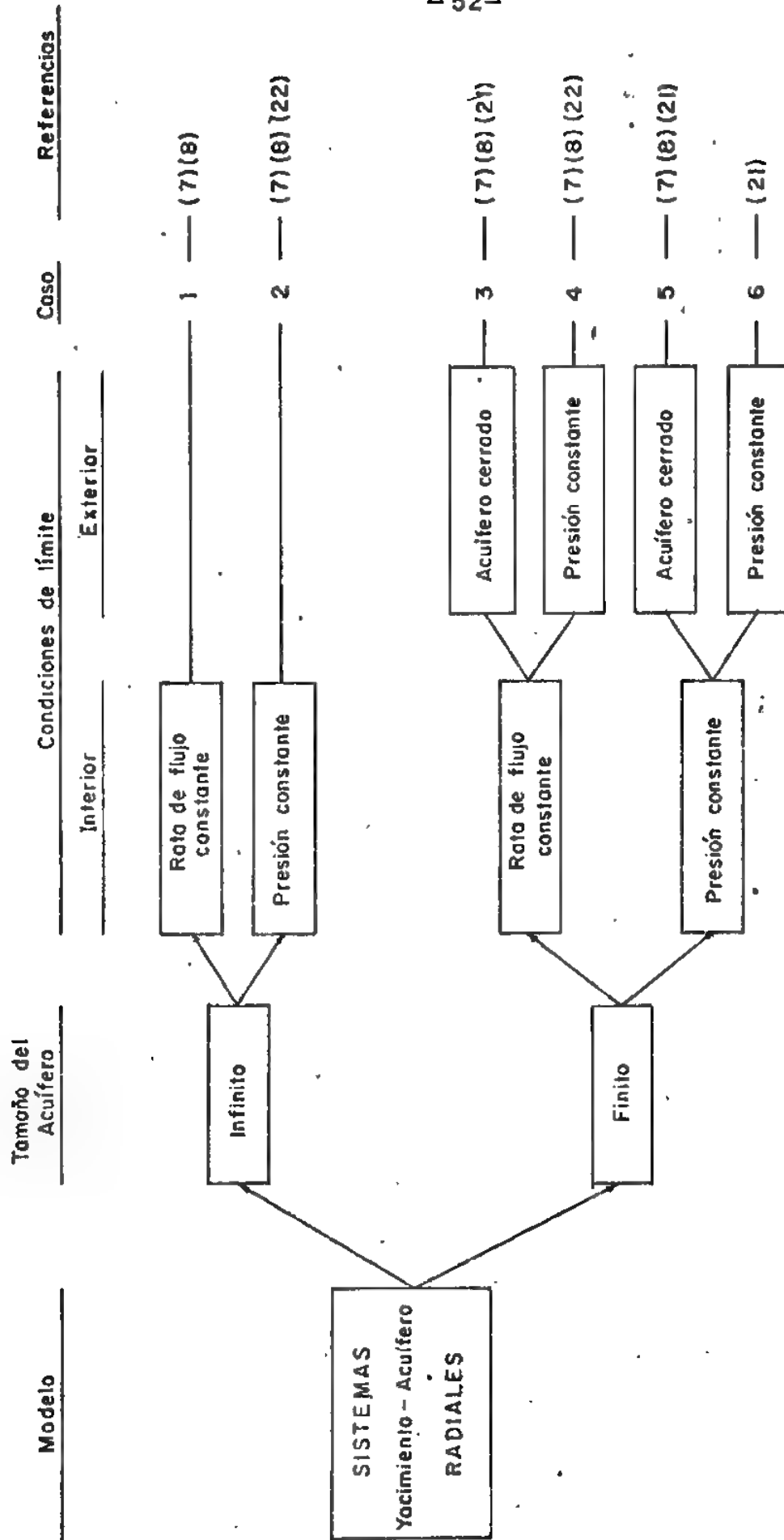


Fig. 18 - Soluciones de la ecuación de difusividad para sistemas (yacimiento - acuífero) radiales.

tiempo  $t$ . A continuación se presentan estas soluciones en unidades prácticas:

A) Solución Exacta de Van Everdingen y Hurst<sup>7</sup>, vEH.

$$p(R_1, t) = p_i - \frac{141,2 \text{ eu}}{kh} \Delta p(t_D) \quad (37)$$

donde,

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1, t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) du}{u^3 [J_1^2(u) + Y_1^2(u)]} \quad (38)$$

Para la obtención de  $\Delta p(t_D)$  pueden usarse las siguientes ecuaciones simplificadas de acuerdo al valor de  $t_D$ :

Si  $t_D < 0,01$ :

$$\Delta p(t_D) = 2 \sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = 1,1284 \sqrt{t_D} \quad (39)$$

Si  $t_D > 100$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta p(t_D) &= \frac{1}{2} (\ln(t_D) + 0,80907) \\ &= 0,5 \ln(t_D) + 0,40454 \\ &= 1,15129 \log(t_D) + 0,40454 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Si  $t_D > 0,01$ : usar la Ec.(38). Afortunadamente esta ecuación ha sido calculada como función de  $t_D$ . La Tabla II presenta valores de  $\Delta p(t_D)$  para  $t_D$  entre 0 y 5000 y la Fig.19 presenta los mismos valores para  $t_D$  entre 0,01 y 10000.

Edwardson y otros<sup>27</sup>, presentan las siguientes ecuaciones

TABLA II - Valores del Cambio (caída) de Presión Adimensional,  $\Delta p(t_D)$ , para el caso 1A: Acuífero (Yacimiento) Infinito, Rata Terminal Constante, Ec.(38). (Referencias 7 y 8). Fig. 19.

$t_D$	$\Delta p(t_D)$	$t_D$	$\Delta p(t_D)$
0	0	20	1,9594
0,005	0,0250	25	2,0621
0,001	0,035191	30	2,1469
0,002	0,049487	35	2,2192
0,003	0,060349	40	2,2822
0,004	0,069433	45	2,3381
0,005	0,077384	50	2,3883
0,006	0,084528	55	2,4339
0,007	0,091063	60	2,4757
0,008	0,097115	65	2,5142
0,009	0,10277	70	2,5499
0,01	0,10810	75	2,5833
0,015	0,1312	80	2,6145
0,020	0,15031	85	2,6439
0,025	0,1669	90	2,6717
0,03	0,18176	95	2,6979
0,04	0,20767	100	2,7229
0,05	0,23007	150	2,9212
0,06	0,24997	200	3,0626
0,07	0,26800	250	3,1726
0,08	0,28455	300	3,2629
0,09	0,29989	350	3,3389
0,1	0,31423	400	3,4051
0,15	0,3750	450	3,4635
0,2	0,42425	500	3,5158
0,3	0,50242	550	3,5632
0,4	0,56462	600	3,6065
0,5	0,61686	650	3,6463
0,6	0,66220	700	3,6833
0,7	0,70242	750	3,7176
0,8	0,73867	800	3,7497
0,9	0,77172	850	3,7799
1,0	0,80215	900	3,8083
2,0	1,0222	950	3,8352
3,0	1,1663	1000	3,8608
4,0	1,2749	1500	4,0627
5,0	1,3625	2000	4,2062
6,0	1,4360	2500	4,3175
7,0	1,4996	3000	4,4086
8,0	1,5556	3500	4,4855
9,0	1,6056	4000	4,5522
10,0	1,6509	4500	4,6110
15,0	1,8293	5000	4,6637

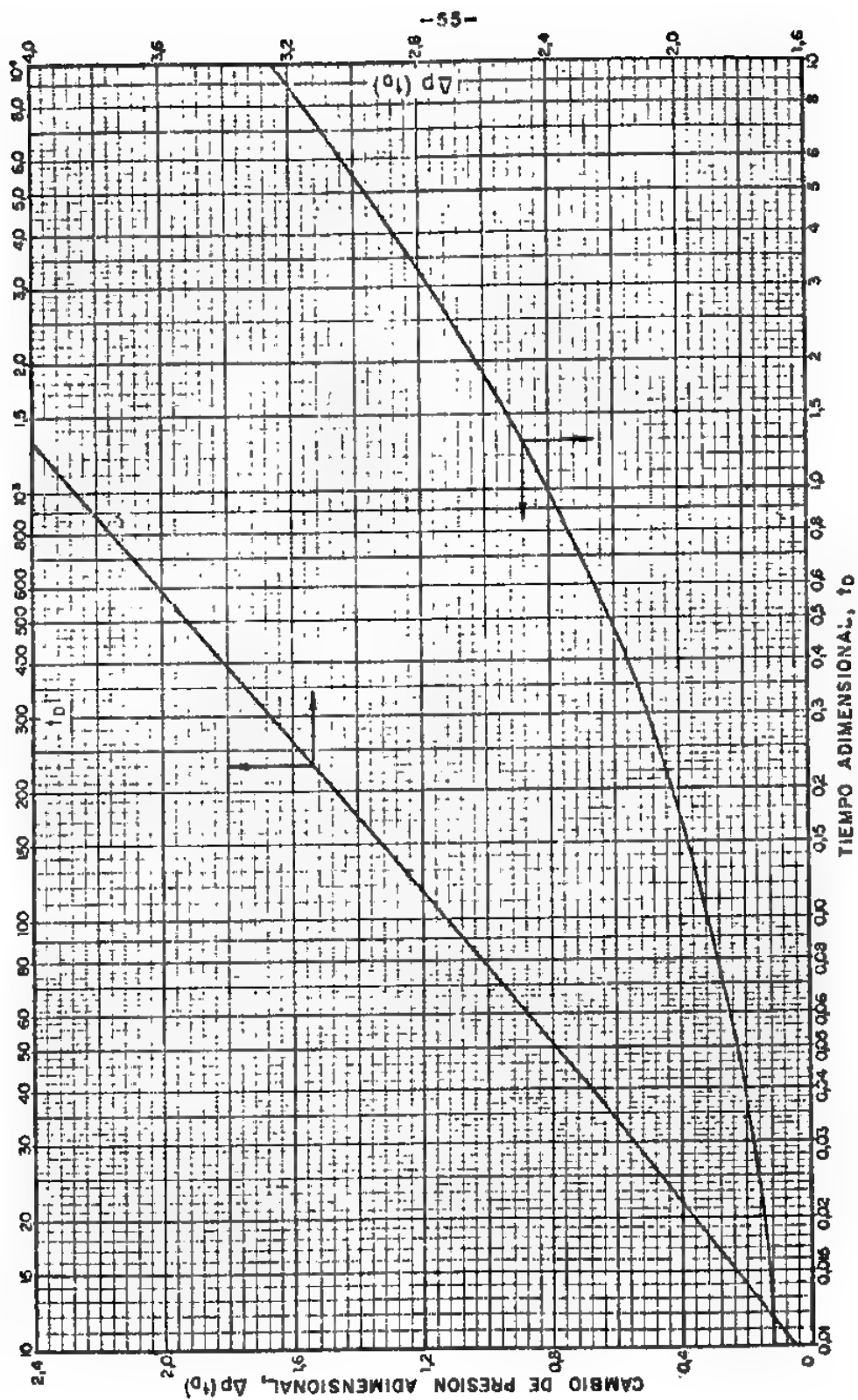


Fig. 19-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema radial infinito. Rate de producción (intrusión) constante. (Referencias 7 y 8).

para el cálculo de  $\Delta p(t_D)$  como función de  $t_D$ :

Si  $0,01 < t_D < 500$ :

$$\Delta p(t_D) = \frac{370,529 \sqrt{t_D} + 137,582 t_D + 5,69549 t_D \sqrt{t_D}}{328,834 + 265,488 \sqrt{t_D} + 45,2157 t_D + t_D \sqrt{t_D}} \quad (41)$$

Máximo error respecto al valor exacto: 0,08 por ciento

Si  $t_D > 500$ :

$$\Delta p(t_D) = \left[ \frac{1}{2} \ln(t_D) + 0,40454 \right] \left[ 1 + \frac{1}{2t_D} \right] + \frac{1}{4t_D} \quad (42)$$

Máximo error respecto al valor exacto: 0,01 por ciento.

Nótese que el primer término entre paréntesis de esta ecuación es igual a la Ec.(40). Las Ecs.(41) y (42) pueden ser de gran utilidad cuando se trata de trabajos en computadores.

B) Solución del Integral Exponencial, Ei. También se denomina solución de la línea fuente o solución de Theis<sup>23</sup>. Aunque esta solución en la tecnología petrolera es más comunmente conocida como solución del integral exponencial o solución de Ei, parece que Theis fué el primero en demostrar como usar esta solución a análisis de flujo no-continuo. Particularmente en hidrología se conoce comunmente como solución de Theis. Esta solución permite calcular la presión a cualquier radio  $r$  o  $r_D$  para cualquier tiempo. Al mismo tiempo puede emplearse para el caso de  $r_D = 1$  ( $r = R_i$  o  $r_w$ ).

La solución del Integral Exponencial introduce la siguiente definición de tiempo adimensional  $t_{Dr}$ .

$$t_{Dr} = \frac{0,006323 \text{ } kt}{\phi \mu c r^2} = \frac{t_D}{r_D^2} \quad (43)$$

y la solución está dada por,

$$p(r,t) = p_i - \frac{141,2(e) R_i \mu}{kh} \Delta p(r_D, t_D) \quad (44)$$

donde,

$$\Delta p(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \left[ -Ei \left( - \frac{1}{4 t_{Dr}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ -Ei \left( - \frac{r_D^2}{4 t_D} \right) \right] \quad (45)$$

A su vez, el valor del integral exponencial está definido por,

$$-Ei(-x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (46)$$

o también, en forma de una serie,

$$Ei(-x) = \ln(x) + 0,5772 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n)(n!)} \quad (47)$$

Los valores de Ei se encuentran tabulados y graficados en el Apéndice A, para diferentes valores del argumento x.

Sí,

$$x = \frac{1}{4 t_{Dr}} = \frac{r_D^2}{4 t_D} < 0,01:$$

usar la Ec.(40) para el calculo de  $\Delta p(r_D, t_D)$ .

C) Solución de Mortada<sup>26</sup>. Permite calcular la presión a cualquier radio r o  $r_D$  para cualquier tiempo, usando una ecuación de la forma de la Ec.(44), donde el  $\Delta p(r_D, t_D)$  se obtiene en forma diferente. van Everdingen y Hurst presentan una ecuación de  $\Delta p(r_D, t_D)$  del siguiente

tipo,

$$\Delta p(r_D, t_D) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) - [J_1(u)Y_0(ur_D) - Y_1(u)J_0(ur_D)] du}{u^2 [J_1^2(u) + Y_1^2(u)]} \quad (48)$$

Sin embargo, no presentan una solución numérica de esta ecuación y sólo la usan como paso intermedio para la solución dada en el Caso A, es decir, para  $r_D = 1$ , la Ec.(48) se convierte en la Ec.(38).

Mortada<sup>26</sup>, usando en parte consideraciones matemáticas y en parte computadores digitales y analógicos, presenta la solución de este caso. Las Figs. 20, 21, y 22, incluyen valores de  $\Delta p(r_D, t_D)$  como función de  $t_D$  y para valores de  $r_D = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ , y  $64$ . Edwardson y otros<sup>27</sup>, dan también valores de  $\Delta p(r_D, t_D)$  como función de  $t_D$  para valores de  $r_D = 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20$ , y  $30$ . Tales resultados se incluyen en la Tabla III. Finalmente, la Fig. 23 presenta valores de  $\Delta p(r_D, t_D)$  como función de  $t_{Dr} = t_D/r_D^2$ , para  $r_D = 1 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,6 ; 1,7 ; 2,0 ; 3,0 ; 5,0 ; 10,0 ; 20,0$ .

En base a los resultados anteriores se presenta la Fig. 24, que relaciona  $r_D$  como función de  $\Delta p(r_D, t_D)$  para valores de  $t_D$  entre 1 y 4000. Incluye también en esta figura, para comparación, los valores de cambio de presión adimensional, usando la solución Ei, Ec.(50).

Mortada sugiere las siguientes ecuaciones para el cálculo de  $\Delta p(r_D, t_D)$ ,

Si  $t_D \leq 0,01$ ,

$$\Delta p(r_D, t_D) = \frac{2 \sqrt{t_D}}{r_D} \operatorname{ierfc}\left(\frac{r_D - 1}{2 \sqrt{t_D}}\right)^* \quad (49)$$

---

\* Ver parte inferior de la página siguiente.



TABLA III - Valores del Cambio (caída) de Presión Adimensional,  $\Delta p(r_D, t_D)$ , como Función de Tiempo Adimensional para Diferentes Valores de  $r_D$ . Caso 1C: Acuífero (o Yacimiento) Infinito, Rata Terminal Constante. (Referencia 27).

$t_D$	$r_D = 2$	$r_D = 3$	$r_D = 5$	$r_D = 8$	$r_D = 10$	$r_D = 15$	$r_D = 20$	$r_D = 30$
4000	3,8591	3,4538	2,9434	2,4746	2,2526	1,8510	1,5687	1,1785
3000	3,7155	3,3102	2,8000	2,3315	2,1099	1,7095	1,4290	1,0438
2000	3,5131	3,1079	2,5980	2,1304	1,9095	1,5117	1,2347	0,8591
1500	3,3697	2,9645	2,4550	1,9881	1,7679	1,3726	1,0991	0,7330
1000	3,1677	2,7627	2,2537	1,7885	1,5697	1,1794	0,9126	0,5647
750	3,0245	2,6197	2,1114	1,6477	1,4303	1,0449	0,7848	0,4539
500	2,8231	2,4187	1,9115	1,4509	1,2364	0,8606	0,6132	0,3140
400	2,7125	2,3083	1,8021	1,3437	1,1314	0,7626	0,5242	0,2456
300	2,5702	2,1664	1,6617	1,2072	0,9982	0,6408	0,4168	0,1716
200	2,3703	1,9674	1,4658	1,0187	0,8164	0,4806	0,2826	0,09061
150	2,2293	1,8272	1,3285	0,8887	0,6929	0,3771	0,2021	0,05111
100	2,0317	1,6313	1,1385	0,7127	0,5291	0,2492	0,1124	0,01806
75	1,8927	1,4940	1,0068	0,5946	0,4224	0,1748	0,06692	0,00691
50	1,6991	1,3035	0,8274	0,4405	0,2888	0,09092	0,02602	0,00115
40	1,5939	1,2007	0,7326	0,3634	0,2252	0,06120	0,01356	0,00032
30	1,4600	1,0706	0,6154	0,2736	0,1552	0,03183	0,00486	0,00004
20	1,2755	0,8940	0,4624	0,1682	0,08081	0,00956	0,00071	
15	1,1482	0,7732	0,3643	0,1100	0,04515	0,00320	0,00012	
10	0,9751	0,6133	0,2441	0,05206	0,01579	0,00041		
7,5	0,8576	0,5080	0,1734	0,02660	0,00603	0,00006		
5,0	0,7011	0,3737	0,09613	0,00787	0,00101			
4,0	0,6200	0,3077	0,06490	0,00337	0,00029			
3,0	0,5217	0,2319	0,03568	0,00088	0,00004			
2,0	0,3960	0,1442	0,01223	0,00007				
1,5	0,3169	0,1003	0,00461	0,00001				
1,0	0,2204	0,04772	0,00077					
0,75	0,1634	0,02581	0,00014					
0,50	0,09938	0,00865	0,00001					
0,40	0,07212	0,00410						
0,30	0,04485	0,00127						
0,20	0,01973	0,00015						
0,15	0,00957	0,00002						
0,10	0,00263							

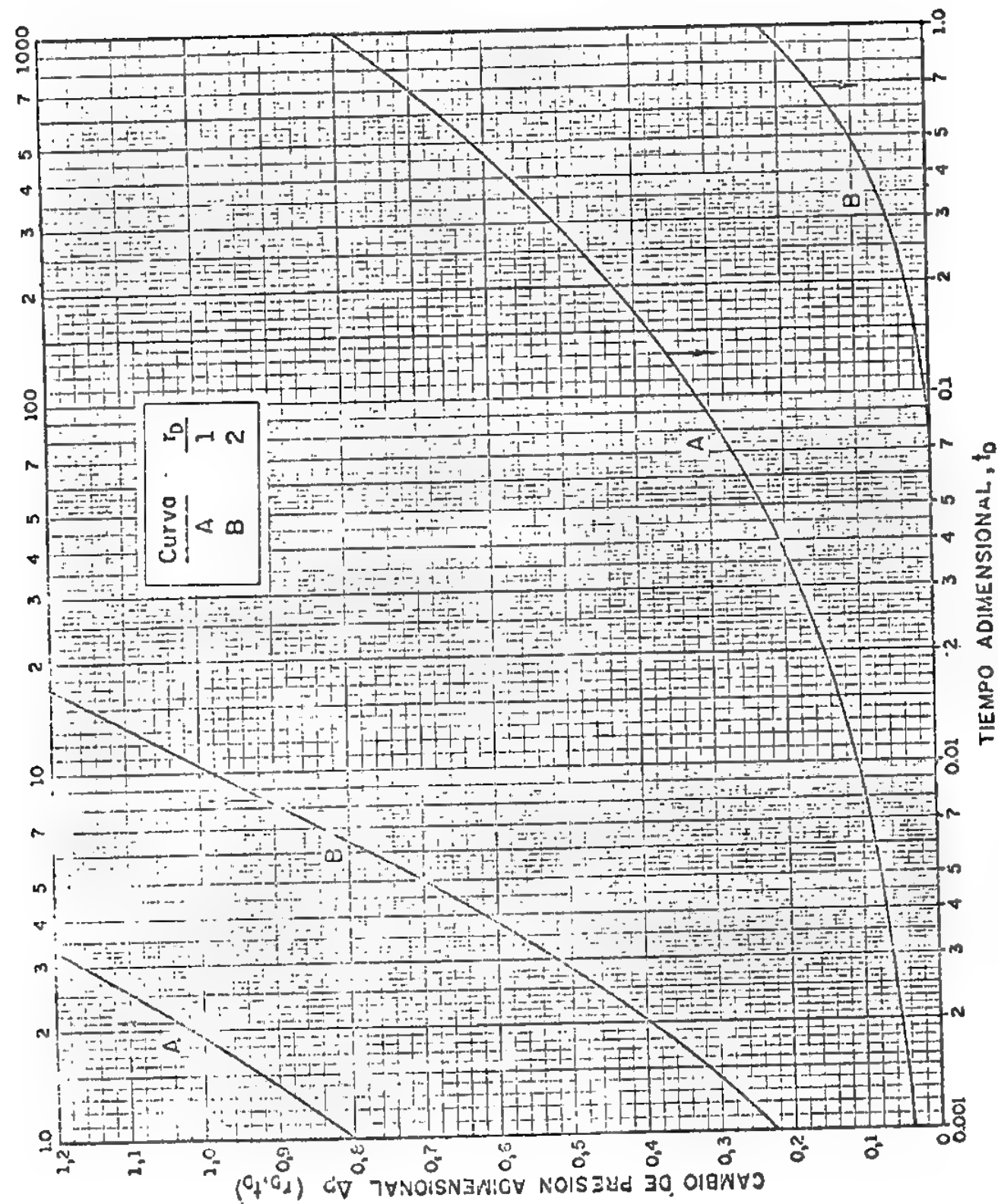


Fig. 20-Cambio de presión adimensional,  $\Delta p (r_D, t_D)$  como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial infinito. Rata terminal (de intrusión) constante.  $r_D$  = radio a partir del centro del yacimiento/radio del yacimiento.  $r_D = 1, 2$ ;  $t_D = 10^{-3}$  a  $10^3$ . (Referencia 26).

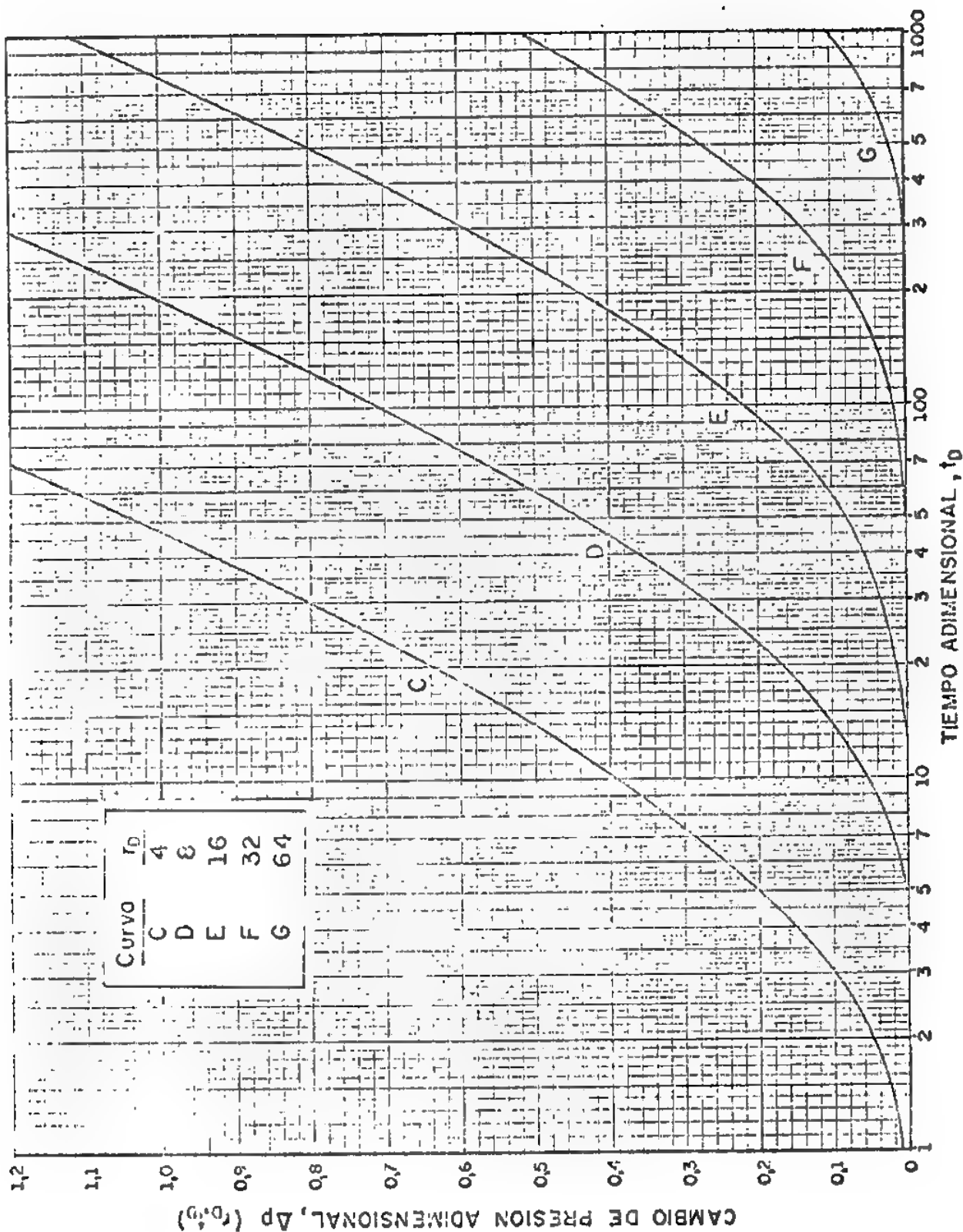


Fig. 21 - Cambio de presión adimensional,  $\Delta p$  ( $r_D, t_D$ ) como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial infinito. Rata terminal (de intrusión) constante.  $r_D$  = radio a partir del centro del yacimiento/ radio del yacimiento.  $r_D = 4$  a  $64$ ;  $t_D = 1$  a  $10^3$  (Referencia 26).

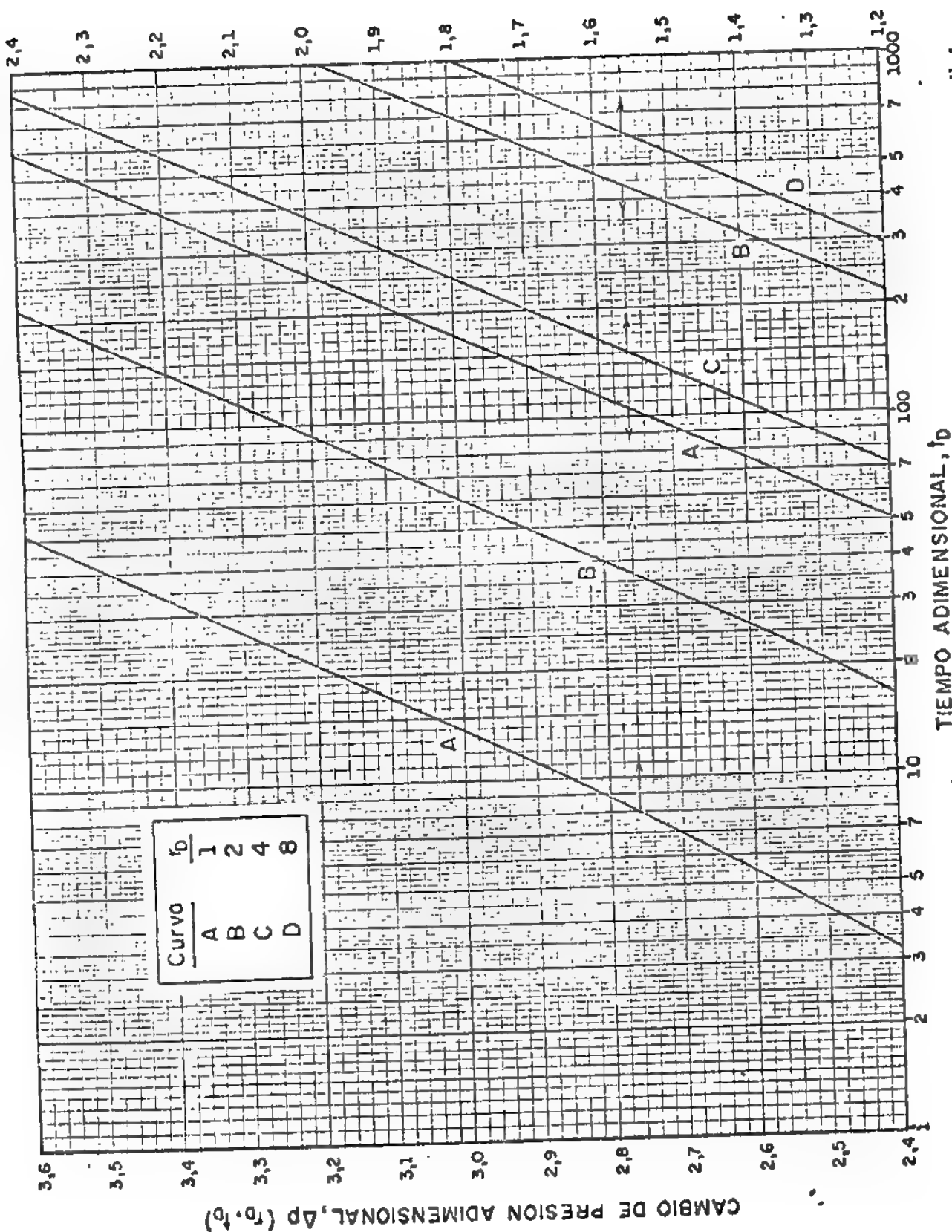


Fig. 22 - Cambio de presión adimensional,  $\Delta p (r_0, t_D)$  como función de tiempo adimensional,  $t_D$  Sistema radial infinito. Rota terminal (de intrusión) constante.  $r_0$  = radio a partir del centro del yacimiento radio/del yacimiento.  $r_0 = 1$  o  $8$ ;  $t_D = 1$  o  $10^3$ . (Referencia 26).

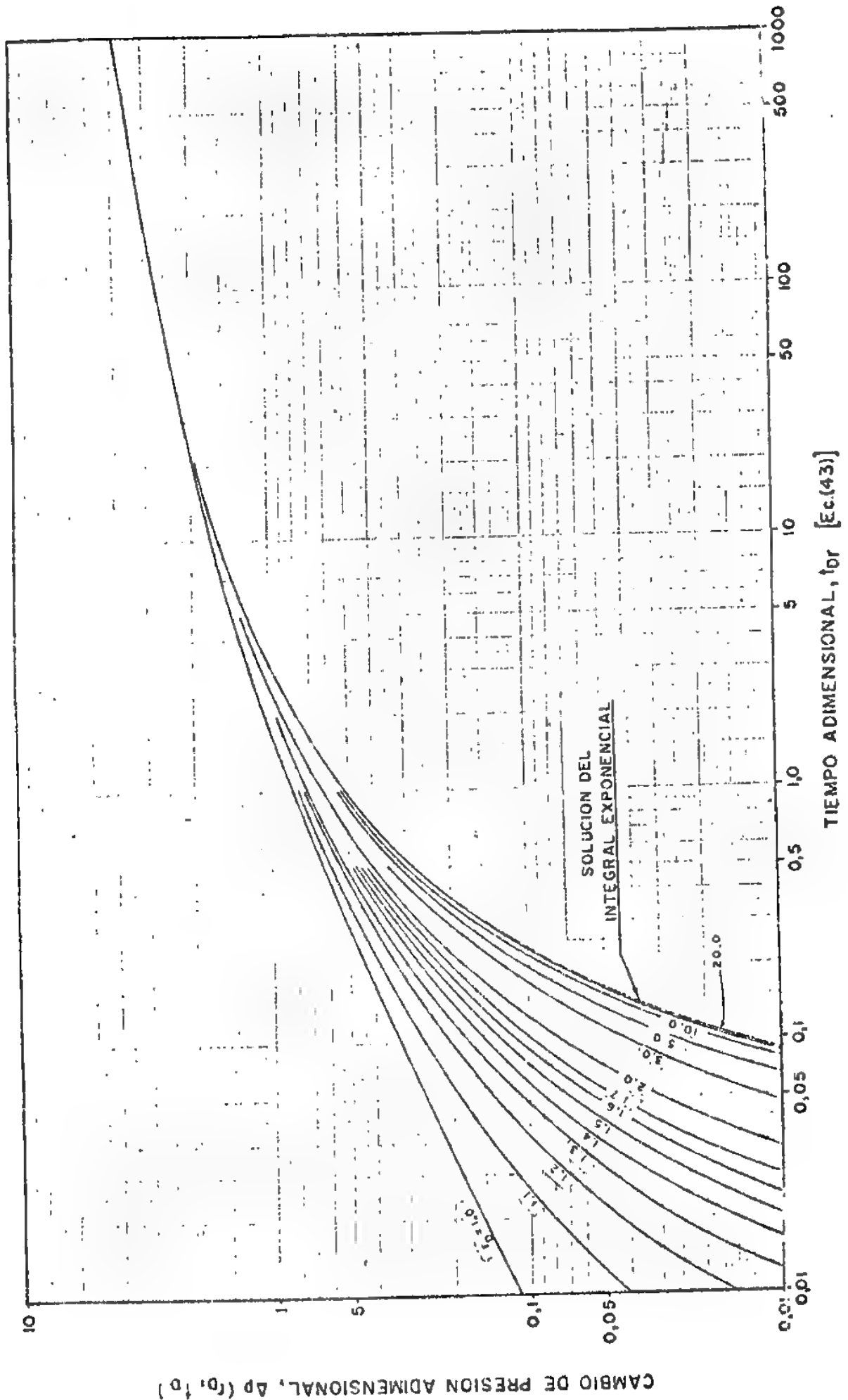


Fig. 23.— Solución de la ecuación de difusividad para flujo radial por el método de van Everdingen y Hurst ( $r_D = 1$ ).  
 Morfada y método del integral exponencial (Referencia 25)

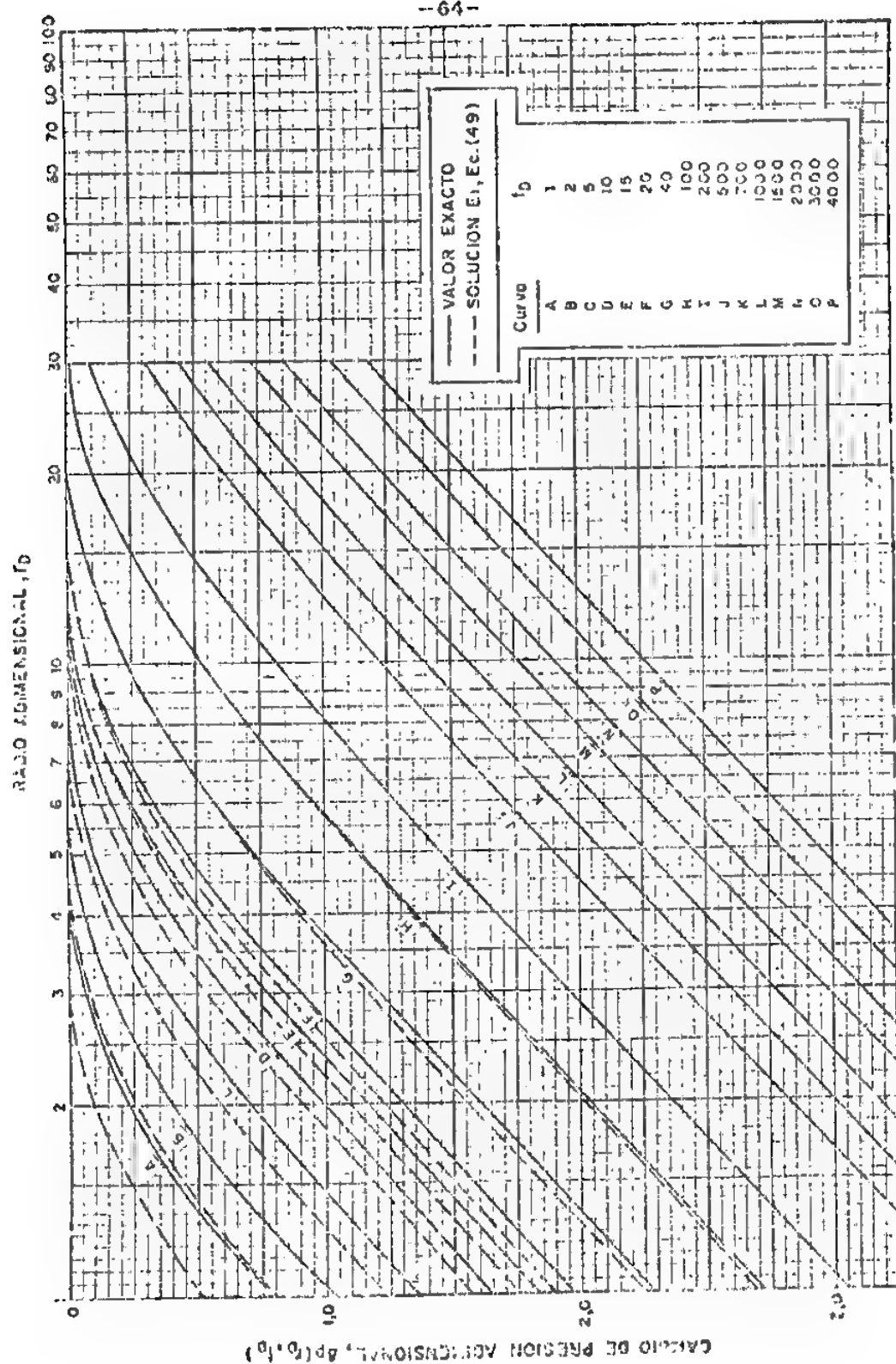


Fig. 24.— Cambio de presión adimensional,  $\Delta p(r_0, t_0)$ , como función de radio adimensional,  $r_0$  y tiempo adimensional,  $t_0$ .

Si  $t_D \geq 500$ :

$$Ap(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \left[ 1 - Ei\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \right] \quad (50)$$

Comparación de las Soluciones del Caso 1.- Mueller y Witherspoon<sup>25</sup> presentan una comparación del valor del cambio de presión adimensional,  $Ap(r_D, t_D)$ , usando la solución de van Everdingen y Hurst ( $r_D=1$ ), la solución de Mortada y la solución del integral exponencial. Los resultados aparecen en la Fig.23. Como puede observarse, esta figura presenta  $Ap(r_D, t_D)$  como función de  $t_{Dp}$ , definido por la Ec.(43), es decir,  $t_D/r_D^2$ . La solución de Mortada para  $r_D=1,0$  es igual a la solución de van Everdingen y Hurst. Las curvas entre  $r_D=1,0$  y  $r_D=20,0$  fueron obtenidas de la solución de Mortada, haciendo la transformación del tiempo adimensional  $t_D$  al tiempo adimensional  $t_{Dp}$ , Ec.(43). Para los radios no incluidos en el trabajo de Mortada, se obtuvo la solución por computadores, en forma similar a la técnica usada por Mueller en otro estudio<sup>21</sup>. La curva inferior, en parte indicada con líneas interrumpidas, representa la solución del integral exponencial, obtenida asignando valores a  $t_{Dp}$  y calculando  $Ap(r_D, t_D)$  de acuerdo a la Ec.(15). Es interesante observar la diferencia en los valores de  $Ap(r_D, t_D)$  de acuerdo a si se usa la solución de van Everdingen y Hurst, Mortada o el Integral

$$* \operatorname{ierfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\pi} - (x)\operatorname{erfc}(x)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty e^{-u^2} du = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Exponencial. A medida que disminuye el valor de  $t_{Dr}$ , aumenta la diferencia en  $\Delta p(r_D, t_D)$  para las soluciones de vEH y Kortada en comparación con la solución Ei. La Fig.25 ilustra el error en porcentaje, como función de  $t_D$ , de la diferencia de las soluciones de vEH ( $r_D = 1$  y  $t_{Dr} = t_D$ ) y del Ei, tanto con respecto a la solución de vEH como respecto a la solución Ei. Claramente puede observarse que a medida que disminuye  $t_D$  aumenta el error, de donde pueda concluirse que la solución del integral exponencial presenta un mayor error respecto a la solución de vEH a medida que disminuye  $t_D$ . Tal error debe tenerse en cuenta, especialmente para valores de  $t_D$  por debajo de 10.

Es también interesante observar de la Fig.23, como a medida que aumenta el valor de  $r_D$ , la diferencia de  $\Delta p(r_D, t_D)$  entre las distintas soluciones, con respecto a la solución Ei, es menor y puede concluirse que para  $r_D \geq 20$  la solución Ei, puede usarse para el cálculo de  $\Delta p(r_D, t_D)$  prácticamente sin ningún error.

Caso 2.- Presión constante en el contacto agua-petróleo (acuífero-yacimiento), o sea en el límite interior. Como en el Caso 1, en el límite exterior, la presión tiende a  $p_i$  cuando el radio tiende a infinito. Analíticamente, las condiciones de límite son:

Unidades Dimensionales

Unidades Adimensionales

$$a) (p)_{Ri} = \text{constante, para } t > 0$$

$$p(R_i, t) = \text{constante}$$

$$p(1, t_D) = \text{constante}$$

En otra forma:

$$(\Delta p)_{Ri} = (p_i - p)_{Ri} = \text{constante, para } t > 0$$

$$\Delta p(R_i, t) = \text{constante}$$

$$\Delta p(1, t_D) = \text{constante}$$



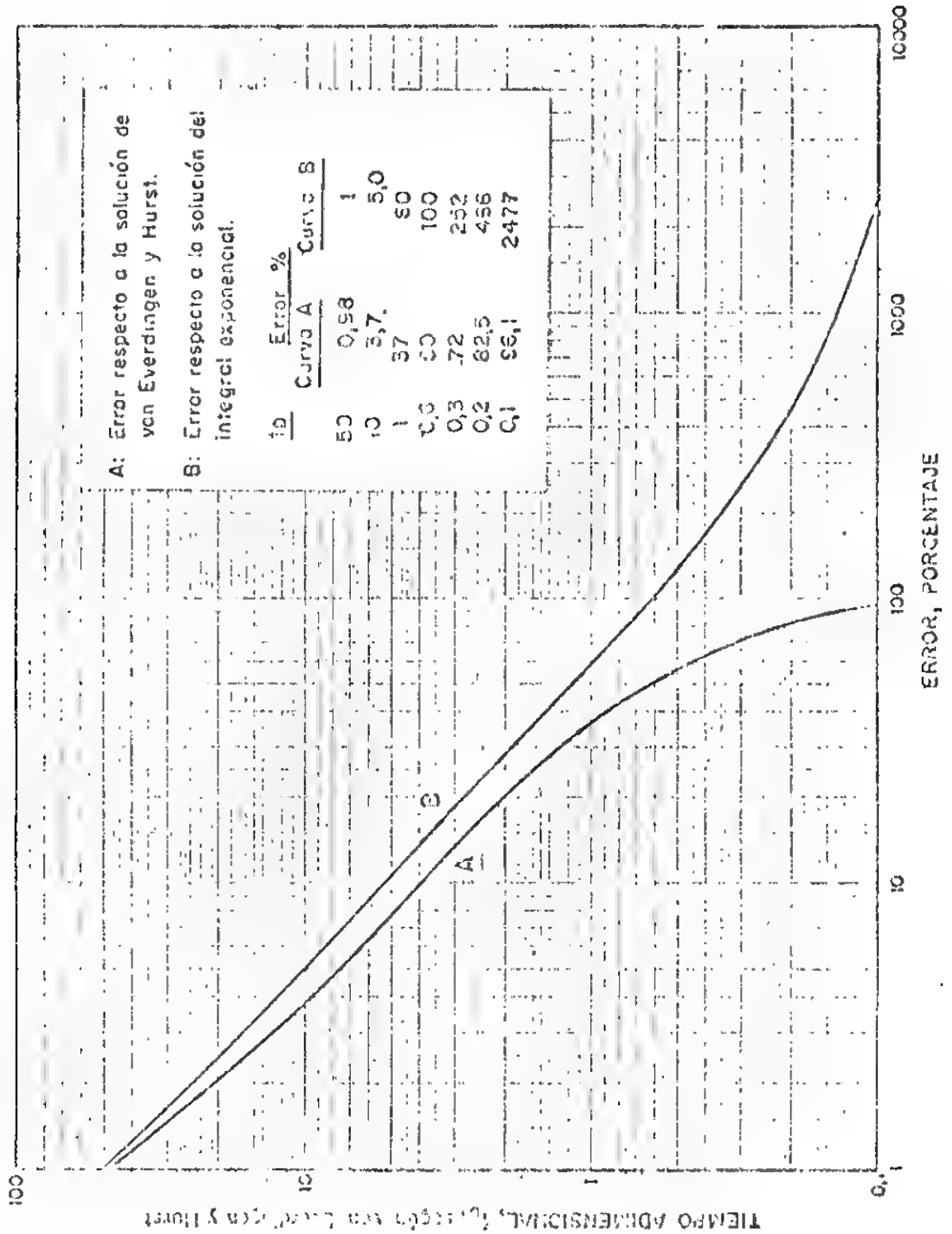


Fig.25.- Porcentaje de error como función de tiempo adimensional,  $t_D$ , entre las soluciones de la ecuación de difusividad de van Everdingen y Hurst y del integral exponencial.

b) Igual a la Condición b) del Caso 1

En este caso, van Everdingen y Hurst<sup>7</sup> presentan la solución para calcular la cantidad total de agua que pasa a través del contacto agua-petróleo (o que fluye al pozo), manteniendo una presión,  $p$ , constante en el contacto agua-petróleo (pozo) durante un  $t_D$ . La solución en cantidades prácticas es,

$$W_e(R_i, t) = W_e = 1,119 \phi c h R_i^2 \frac{\pi}{360^\circ} (\Delta p)_{R_i} Q(t_D) \quad (51)$$

donde,

$$Q(t_D) = Q(1, t_D) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) du}{u^3 [J_0^2(u) + Y_0^2(u)]} \quad (52)$$

Además,  $\theta$  representa el ángulo en grados, correspondientes al arco de circunferencia en que el acuífero es activo al yacimiento.

En forma similar al caso anterior,

Si  $t_D < 0,01$ :

$$Q(t_D) = 2 \sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = 1,1284 \sqrt{t_D} \quad (53)$$

Si  $t_D > 0,01$ : usar la Ec.(52). Afortunadamente esta ecuación ha sido calculada como función de  $t_D$ . Los valores de  $Q(t_D)$  se presentan en la Tabla IV para  $t_D$  entre 0 y  $2 \times 10^{12}$  y en las Figs. 26 y 27 para valores de  $t_D$  entre 0,01 y  $10^{10}$ .

Edwards y otros<sup>27</sup> presentan las siguientes ecuaciones para el cálculo de  $Q(t_D)$  en función de  $t_D$ :

Si  $0,01 < t_D < 200$ :

TABLA IV - Valores de Intrusión Adimensional,  $Q(t_D)$ , como Función de Tiempo Adimensional,  $t_D$ . Caso 2: Acuífero (Yacimiento) Infinito, Presión Terminal Constante, Ec. (52). (Referencia 7 y 8). Figs. 26 y 27.

$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
0,00	0,000	33	18,011	79	35,697	225	83,497
0,01	0,112	34	18,429	80	36,058	230	85,023
0,05	0,278	35	18,845	81	36,418	235	86,545
0,10	0,404	36	19,259	82	36,777	240	88,062
0,15	0,520	37	19,671	83	37,136	245	89,575
0,20	0,606	38	20,080	84	37,494	250	91,084
0,25	0,689	39	20,488	85	37,851	255	92,589
0,30	0,758	40	20,894	86	38,207	260	94,090
0,40	0,898	41	21,298	87	38,563	265	95,588
0,50	1,020	42	21,701	88	38,919	270	97,081
0,60	1,140	43	22,101	89	39,272	275	98,571
0,70	1,251	44	22,500	90	39,626	280	100,057
0,80	1,359	45	22,897	91	39,979	285	101,540
0,90	1,469	46	23,291	92	40,331	290	103,019
1	1,569	47	23,684	93	40,684	295	104,495
2	2,447	48	24,076	94	41,034	300	105,968
3	3,202	49	24,466	95	41,385	305	107,437
4	3,893	50	24,855	96	41,735	310	108,904
5	4,539	51	25,244	97	42,084	315	110,367
6	5,143	52	25,633	98	42,433	320	111,827
7	5,743	53	26,020	99	42,781	325	113,284
8	6,314	54	26,406	100	43,129	330	114,738
9	6,869	55	26,791	105	44,858	335	116,189
10	7,411	56	27,174	110	46,574	340	117,638
11	7,940	57	27,555	115	48,277	345	119,083
12	8,457	58	27,935	120	49,968	350	120,526
13	8,964	59	28,314	125	51,648	355	121,966
14	9,461	60	28,691	130	53,317	360	123,403
15	9,949	61	29,068	135	54,976	365	124,838
16	10,434	62	29,443	140	56,625	370	126,270
17	10,913	63	29,818	145	58,265	375	127,699
18	11,386	64	30,192	150	59,895	380	129,126
19	11,855	65	30,565	155	61,517	385	130,550
20	12,319	66	30,937	160	63,131	390	131,972
21	12,778	67	31,308	165	64,737	395	133,391
22	13,233	68	31,679	170	66,336	400	134,808
23	13,684	69	32,048	175	67,928	405	136,223
24	14,131	70	32,417	180	69,512	410	137,635
25	14,572	71	32,785	185	71,090	415	139,045
26	15,013	72	33,151	190	72,661	420	140,453
27	15,450	73	33,517	195	74,226	425	141,859
28	15,883	74	33,883	200	75,785	430	143,262
29	16,313	75	34,247	205	77,338	435	144,664
30	16,742	76	34,611	210	78,886	440	146,064
31	17,167	77	34,974	215	80,428	445	147,461
32	17,590	78	35,336	220	81,965	450	148,856

TABLA IV - (Continuación).

$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
455	150,249	825	248,957	1225	349,460	1875	505,019
460	151,640	830	250,245	1230	350,688	1900	510,861
465	153,029	840	252,819	1240	353,144	1925	516,695
470	154,416	850	255,388	1250	355,597	1950	522,520
475	155,801	860	257,953	1260	358,048	1975	528,337
480	157,184	870	260,515	1270	360,496	2000	534,145
485	158,565	875	261,795	1275	361,720	2025	539,945
490	159,945	880	263,073	1280	362,942	2050	545,737
495	161,322	890	265,629	1290	365,386	2075	551,522
500	162,698	900	268,181	1300	367,828	2100	557,299
510	165,444	910	270,729	1310	370,267	2125	563,068
520	168,183	920	273,274	1320	372,704	2150	568,830
525	169,549	925	274,545	1325	373,922	2175	574,585
530	170,914	930	275,815	1330	375,139	2200	580,332
540	173,639	940	278,353	1340	377,572	2225	586,072
550	176,357	950	280,888	1350	380,003	2250	591,806
560	179,069	960	283,420	1360	382,432	2275	597,532
570	181,774	970	285,948	1370	384,859	2300	603,252
575	183,124	975	287,211	1375	386,070	2325	608,965
580	184,473	980	288,473	1380	387,283	2350	614,672
590	187,166	990	290,995	1390	389,705	2375	620,372
600	189,852	1000	293,514	1400	392,125	2400	626,066
610	192,533	1010	296,030	1410	394,543	2425	631,755
620	195,208	1020	298,543	1420	396,959	2450	637,437
625	196,544	1025	299,799	1425	398,167	2475	643,113
630	197,878	1030	301,053	1430	399,373	2500	648,781
640	200,542	1040	303,560	1440	401,785	2550	660,093
650	203,201	1050	306,065	1450	404,197	2600	671,379
660	205,854	1060	308,567	1460	406,606	2650	682,640
670	208,502	1070	311,066	1470	409,013	2700	693,877
675	209,825	1075	312,314	1475	410,214	2750	705,090
680	211,145	1080	313,562	1480	411,418	2800	716,280
690	213,784	1090	316,055	1490	413,820	2850	727,449
700	216,417	1100	318,545	1500	416,220	2900	738,598
710	219,046	1110	321,032	1525	422,214	2950	749,725
720	221,670	1120	323,517	1550	428,196	3000	760,833
725	222,980	1125	324,760	1575	434,168	3050	771,922
730	224,289	1130	326,000	1600	440,128	3100	782,992
740	226,904	1140	328,480	1625	446,077	3150	794,042
750	229,514	1150	330,958	1650	452,016	3200	805,075
760	232,120	1160	333,433	1675	457,945	3250	816,090
770	234,721	1170	335,906	1700	463,863	3300	827,088
775	236,020	1175	337,142	1725	469,771	3350	838,067
780	237,318	1180	338,376	1750	475,669	3400	849,028
790	239,912	1190	340,943	1775	481,558	3450	859,974
800	242,501	1200	343,308	1800	487,437	3500	870,903
810	245,086	1210	345,770	1825	493,307	3550	881,816
820	247,668	1220	348,230	1850	499,167	3600	892,712

TABLA IV - (Continuación).

$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
3650	903,594	7100	1625,729	$2,5 \times 10^5$	$4,066 \times 10^4$	$6,0 \times 10^9$	5,368x
3700	914,459	7200	1646,011	$3,0 \times "$	$4,817 \times "$	$7,0 \times "$	6,220x
3750	925,309	7300	1666,265	$4,0 \times "$	$6,267 \times "$	$8,0 \times "$	7,066x
3800	936,144	7400	1686,490	$5,0 \times "$	$7,699 \times "$	$9,0 \times "$	7,909x
3850	946,966	7500	1706,688	$6,0 \times "$	$9,113 \times "$	$1,0 \times 10^{10}$	8,747x
3900	957,773	7600	1726,859	$7,0 \times "$	$1,051 \times 10^5$	$1,5 \times "$	1,288x
3950	968,566	7700	1747,002	$8,0 \times "$	$1,189 \times "$	$2,0 \times "$	1,697x
4000	979,344	7800	7767,120	$9,0 \times "$	$1,326 \times "$	$2,5 \times "$	2,103x
4050	990,108	7900	1787,212	$1,0 \times 10^6$	$1,462 \times "$	$3,0 \times "$	2,505x
4100	1000,858	8000	1807,278	$1,5 \times "$	$2,126 \times "$	$4,0 \times "$	3,299x
4150	1011,595	8100	1827,319	$2,0 \times "$	$2,781 \times "$	$5,0 \times "$	4,087x
4200	1022,318	8200	1847,336	$2,5 \times "$	$3,427 \times "$	$6,0 \times "$	4,868x
4250	1033,028	8300	1867,329	$3,0 \times "$	$4,064 \times "$	$7,0 \times "$	5,643x
4300	1043,724	8400	1387,298	$4,0 \times "$	$5,313 \times "$	$8,0 \times "$	6,414x
4350	1054,409	8500	1907,243	$5,0 \times "$	$6,544 \times "$	$9,0 \times "$	7,183x
4400	1065,082	8600	1927,166	$6,0 \times "$	$7,761 \times "$	$1,0 \times 10^{11}$	7,948x
4450	1075,743	8700	1947,065	$7,0 \times "$	$8,965 \times "$	$1,5 \times "$	1,17 x
4500	1086,390	8800	1966,942	$8,0 \times "$	$1,016 \times 10^6$	$2,0 \times "$	1,53 x
4550	1097,024	8900	1986,793	$9,0 \times "$	$1,104 \times "$	$2,5 \times "$	1,92 x
4600	1107,645	9000	2006,628	$1,0 \times 10^7$	$1,252 \times "$	$3,0 \times "$	2,29 x
4650	1118,257	9100	2026,433	$1,5 \times "$	$1,828 \times "$	$4,0 \times "$	3,02 x
4700	1128,854	9200	2046,227	$2,0 \times "$	$2,393 \times "$	$5,0 \times "$	3,75 x
4750	1139,439	9300	2065,996	$2,5 \times "$	$2,961 \times "$	$6,0 \times "$	4,47 x
4800	1150,012	9400	2085,744	$3,0 \times "$	$3,517 \times "$	$7,0 \times "$	5,19 x
4850	1160,574	9500	2105,473	$4,0 \times "$	$4,610 \times "$	$8,0 \times "$	5,89 x
4900	1171,125	9600	2125,184	$5,0 \times "$	$5,689 \times "$	$9,0 \times "$	6,53 x
4950	1181,666	9700	2144,878	$6,0 \times "$	$6,758 \times "$	$1,0 \times 10^{12}$	7,28 x
5000	1192,198	9800	2164,555	$7,0 \times "$	$7,816 \times "$	$1,5 \times "$	1,08 x
5100	1213,222	9900	2184,216	$8,0 \times "$	$8,866 \times "$	$2,0 \times "$	1,42 x
5200	1234,203	10000	2203,861	$9,0 \times "$	$9,911 \times "$		
5300	1255,141	12500	2668,967	$1,0 \times 10^8$	$1,095 \times 10^7$		
5400	1276,037	15000	3164,780	$1,5 \times "$	$1,604 \times "$		
5500	1296,993	17500	3633,368	$2,0 \times "$	$2,108 \times "$		
5600	1317,709	20000	4095,800	$2,5 \times "$	$2,607 \times "$		
5700	1338,486	25000	5005,726	$3,0 \times "$	$3,100 \times "$		
5800	1359,225	30000	5899,508	$4,0 \times "$	$4,071 \times "$		
5900	1379,927	35000	6780,247	$5,0 \times "$	$5,032 \times "$		
6000	1400,593	40000	7650,096	$6,0 \times "$	$5,984 \times "$		
6100	1421,224	50000	9363,099	$7,0 \times "$	$6,928 \times "$		
6200	1441,820	60000	11047,299	$8,0 \times "$	$7,865 \times "$		
6300	1462,383	70000	12708,358	$9,0 \times "$	$8,797 \times "$		
6400	1482,912	75000	13531,457	$1,0 \times 10^9$	$9,725 \times "$		
6500	1503,408	80000	14350,121	$1,5 \times "$	$1,429 \times "$		
6600	1523,872	90000	15975,389	$2,0 \times "$	$1,880 \times "$		
6700	1544,305	100000	17586,284	$2,5 \times "$	$2,328 \times "$		
6800	1564,706	125000	21560,732	$3,0 \times "$	$2,771 \times "$		
6900	1585,077	150000	$2,538 \times 10^4$	$4,0 \times "$	$3,645 \times "$		
7000	1605,418	200000	$3,308 \times "$	$5,0 \times "$	$4,510 \times "$		

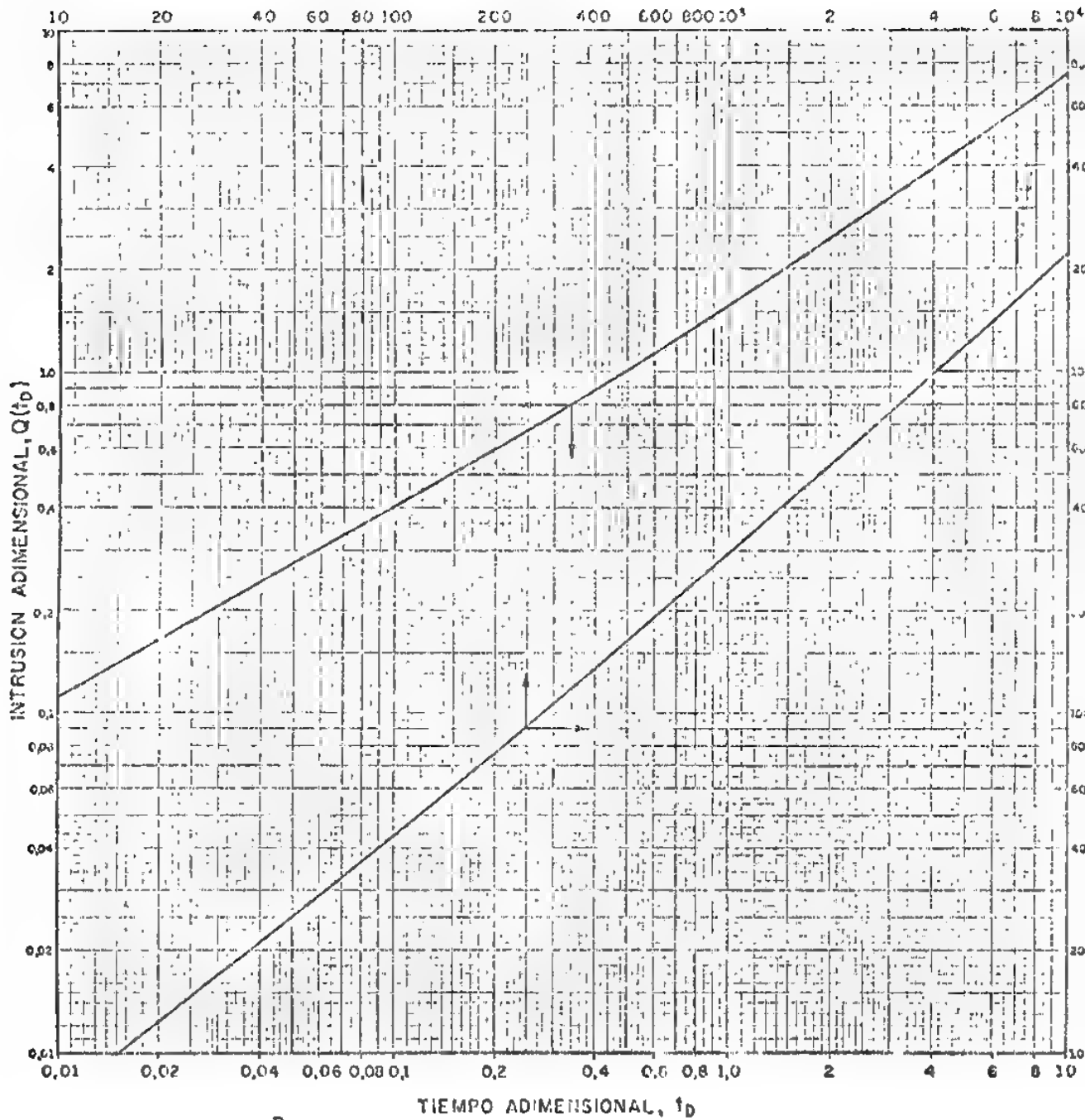


Fig.26-Intrusión adimensional,  $Q(t_D)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial infinito. Presión (o caída de presión) constante, es decir, presión terminal constante. Intervalo de  $t_D$ :  $10^{-2}$  a  $10^4$  (Referencias 7 y 8).

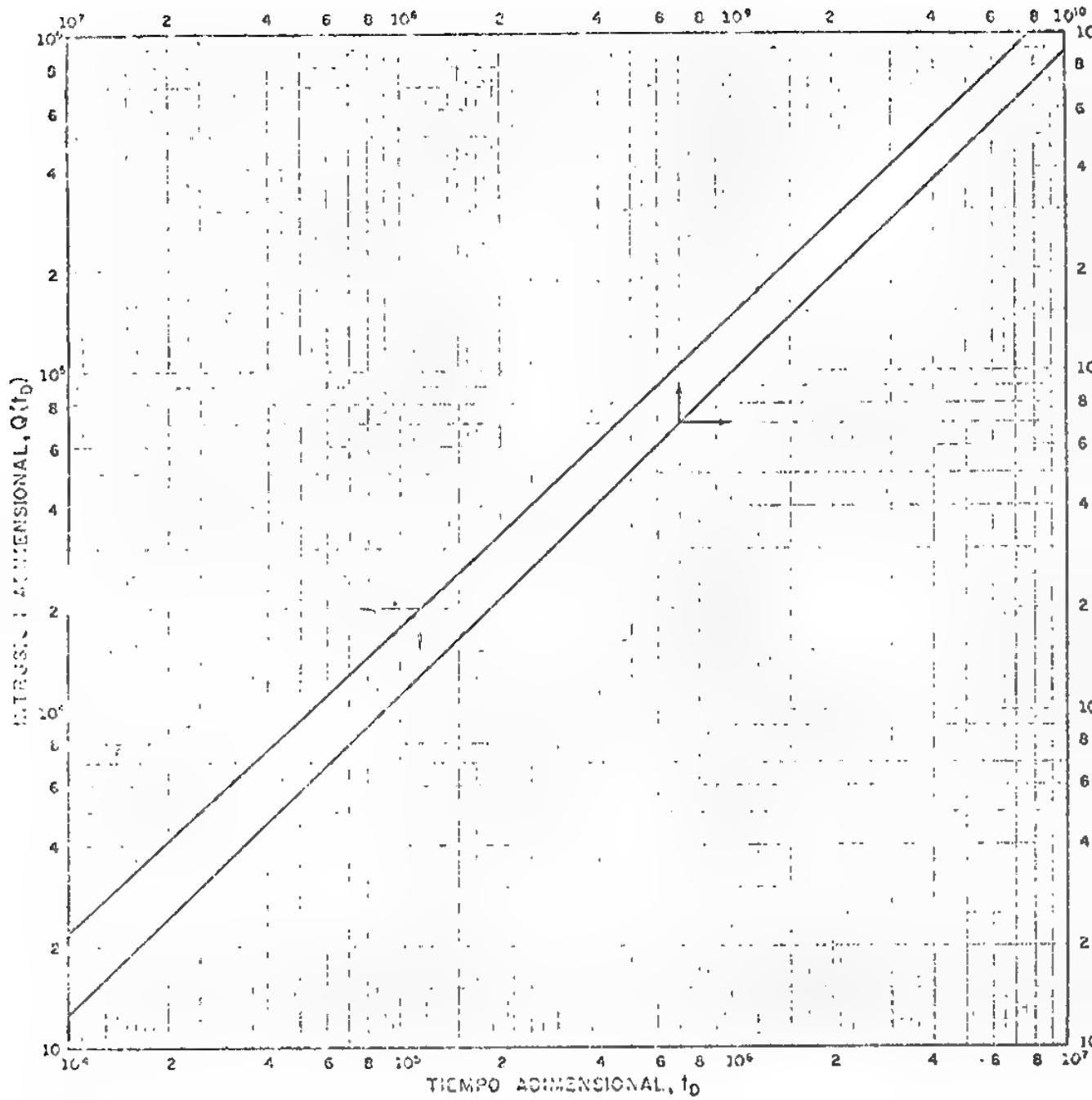


Fig.27-Intrusión adimensional,  $Q(t_D)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial infinito. Presión (o coef. de presión) constante, es decir, presión terminal constante. Intervalo de  $t_D$ :  $10^4$  o  $10^{10}$ . (referencias 7;8 ).

$$Q(t_D) = \frac{1,12838 \sqrt{t_D} + 1,19328 t_D + 0,269672 t_D \sqrt{t_D} + 0,00855294 (t_D)^2}{1 + 0,616599 \sqrt{t_D} + 0,0413008 t_D} \quad (5)$$

Máximo error, respecto al valor exacto, 0,02 por ciento

Si  $t_D \geq 200$ :

$$Q(t_D) = \frac{-4,29881 + 2,02566 t_D}{\ln(t_D)} \quad (5)$$

Máximo error, respecto al valor exacto, 0,07 por ciento.

II - Acuíferos finitos (Limitados) - En este caso,  $r$  tiene un valor máximo constante denominado  $r_e$ , correspondiente al límite exterior. El valor adimensional de este radio  $r_e$  será  $r_{eD} = r_e/R_1$  (en el caso de yacimiento  $r_{eD} = r_e/r_w$ ).

Existen cuatro soluciones para este tipo de acuíferos: dos de Rata Terminal Constante y dos de Presión Terminal Constante. Se han denominado Caso 3 y Caso 4 a las dos primeras y Caso 5 y Caso 6 a las dos últimas. A continuación se describen las condiciones de límite y las soluciones para cada una de estos casos:

Caso 3 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente las condiciones límite son:

Unidades Dimensionales

Unidades Adimensionales

a) Igual a la Condición a) del Caso 1

b)  $(e)_{r_e} = 0$ , para  $t > 0$



En otra forma:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r_0} = 0, \text{ para } t > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r_0, t) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r_D}(r_{0D}, t_D) = 0$$

Este caso también fue resuelto por van Everdingen y Hurst<sup>7</sup>.  
Presentan la Ec.(56) para el cálculo de la presión a cualquier radio  $r$  y a cualquier tiempo  $t$ ,

$$p(r, t) = p_i - \frac{141,2 (e) R_i \mu}{kh} \Delta p(r_D, t_D) \quad (56)$$

donde,

$$\begin{aligned} \Delta p(r_D, t_D) = & \frac{2}{(r_{0D})^2 - 1} \left[ \frac{r_0^2}{4} + t_D \right] - \frac{(r_{0D})^2 \ln(r_D)}{(r_{0D})^2 - 1} - \\ & - \frac{3(r_{0D})^4 - 4(r_{0D})^4 \ln(r_{0D}) - 2(r_{0D})^2 - 1}{4[(r_{0D})^2 - 1]^2} + \\ & + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 t_D} J_1^2(a_n r_{0D}) [J_1(a_n) Y_0(a_n r_D) - Y_1(a_n) J_0(a_n r_D)]}{a_n [J_1^2(a_n r_{0D}) - J_1^2(a_n)]} \end{aligned} \quad (57)$$

donde  $a_n$  son las raíces de la ecuación,

$$J_1(a_n r_{0D}) Y_1(a_n) - J_1(a_n) Y_1(a_n r_{0D}) = 0 \quad (58)$$

De la Ec.(57) no se han dado soluciones en forma tabulada.  
Es prácticamente la misma solución dada por Muskat<sup>24</sup>.

El caso 3 también ha sido resuelto por van Everdingen<sup>7</sup> para obtener la

presión en el contacto agua-petróleo (o en el pozo) a cualquier tiempo  $t$ ,

$$p(R_i, t) = p_i - \frac{141,2 (q) R_i \mu}{kh} \Delta p(t_D) \quad (59)$$

donde,

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1, r_D) + \frac{1 + 4t_D}{2[(r_{eD})^2 - 1]} - \frac{3(r_{eD})^2 - 4(r_{eD})^4 \ln(r_{eD}) - 2(r_{eD})^2 - 1}{4[(r_{eD})^2 - 1]^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 t_D} J_1^2(a_n r_{eD})}{a_n^2 [J_1^2(a_n r_{eD}) - J_1^2(a_n)]} \quad (60)$$

donde  $a_n$ , como antes, son las raíces de la Ec.(58). La Ec.(60) no es más que la Ec.(57) para  $r_D=1$

Si  $t_D < 0,01$ : usar la Ec.(39) para calcular  $\Delta p(t_D)$ . VEH<sup>7</sup> presentan la coincidencia de la Ec.(60) para  $r_{eD}$  entre 1,5 y 10,0. Sus resultados se presentan en la Tabla V y la Fig.28. Para otros valores de  $r_{eD}$  se ha calculado  $\Delta p(t_D)$  usando la función  $F(t_{DA})$  de HBN, desarrollada por Matthews, Brons y Hazebroek<sup>23</sup>, de acuerdo a la siguiente ecuación y según se deduce en el Apéndice B,

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2} \left[ - \operatorname{Ei} \left( - \frac{1}{4t_D} \right) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA}) \right] \quad (61)$$

donde  $t_{DA}$  es el tiempo adimensional en base al pozo (ver Apéndice B). Para un círculo, la relación entre  $t_D$  y  $t_{DA}$  es,

$$t_D = \pi (r_{eD})^2 t_{DA} \quad (62)$$

Los resultados de los cálculos de la Ec.(61) para  $r_{eD}$  entre 20 y 25000 se presentan también en la Tabla V y se han graficado, para  $r_{eD}$  entre 100 y 25000, en las Figs. 29 y 30.

Caso 4 - Rata de intrusión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y presión constante en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

Unidades Dimensionales

Unidades Adimensionales

a) Igual a la Condición a) del Caso 1

b)  $p = p_i$  para  $r = r_e$  y para todo  $t$ .

$$p(r_e, t) = p_i$$

$$P(r_D, t_D) = 0$$

Este caso ha sido resuelto analíticamente por Hurst<sup>26</sup> considerando un cilindro como fuente y Muskat<sup>24</sup> considerando una línea como fuente. En ambos casos, la solución permite calcular la presión en el contacto agua-petróleo (o en el pozo),

$$p(R_1, t) = p_i - \frac{141.2(c)R_1 \mu}{kh} \Delta p(t_D) \quad (61)$$

donde: (1) Para la solución de un cilindro como fuente:

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1, t_D) = \ln(r_{eD}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t_D} J_0^2(\alpha_n r_{eD})}{\alpha_n^2 [J_1^2(\alpha_n) - J_0^2(\alpha_n r_{eD})]} \quad (64)$$

donde  $\alpha_n$  son las raíces de la ecuación,

$$J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n r_{eD}) - Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n r_{eD}) = 0 \quad (65)$$

(2) Para la solución considerando una línea como fuente:

TABLE V - Valores del Cambio de Presión Adimensional,  $\Delta p(t_D)$  como Función de Tiempo Adimensional,  $t_D$ , para Valores de  $r_{eD}$  entre 1,5 y 25000. Caso 3: Acuífero (Yacimiento) Radial Limitado (Finito). Rata de Inyección (Producción) Constante en el Límite Interior e Igual a Cero en el Límite Exterior (Acuífero Cerrado). Valores de  $r_{eD}$  entre 1,5 y 10. Ec.(60), Referencias 7 y 8, Fig. 28; los demás Valores Calculados por el Autor, Ec.(61), Figs 29 y 30.

$r_{eD} = 1,5$		$r_{eD} = 2$		$r_{eD} = 2,5$		$r_{eD} = 3$		$r_{eD} = 3,5$		$r_{eD} = 4$	
$t_D$	$\Delta p(t_D)$	$t_D$	$\Delta p(t_D)$	$t_D$	$\Delta p(t_D)$	$t_D$	$\Delta p(t_D)$	$t_D$	$\Delta p(t_D)$	$t_D$	$\Delta p(t_D)$
0,05	0,251	0,22	0,443	0,42	0,555	0,72	0,627	1,0	0,802	1,5	0,927
0,09	0,283	0,24	0,459	0,42	0,575	0,54	0,636	1,1	0,830	1,6	0,942
0,10	0,322	0,26	0,476	0,44	0,587	0,55	0,645	1,2	0,857	1,7	0,968
0,12	0,355	0,23	0,492	0,46	0,593	0,60	0,662	1,3	0,882	1,8	0,988
0,14	0,327	0,30	0,507	0,48	0,608	0,65	0,683	1,4	0,906	1,9	1,007
0,16	0,420	0,32	0,522	0,50	0,628	0,70	0,703	1,5	0,929	2,0	1,025
0,18	0,452	0,34	0,535	0,52	0,628	0,75	0,721	1,6	0,951	2,2	1,059
0,20	0,437	0,35	0,551	0,54	0,633	0,80	0,740	1,7	0,973	2,4	1,092
0,22	0,516	0,36	0,565	0,55	0,647	0,85	0,758	1,8	0,994	2,6	1,123
0,24	0,548	0,40	0,579	0,58	0,657	0,90	0,776	1,9	1,014	2,8	1,154
0,26	0,580	0,42	0,593	0,60	0,665	0,95	0,791	2,0	1,034	3,0	1,184
0,28	0,612	0,44	0,607	0,65	0,686	1,00	0,805	2,25	1,063	3,5	1,255
0,30	0,644	0,46	0,621	0,70	0,710	1,20	0,855	2,50	1,130	4,0	1,324
0,35	0,724	0,48	0,634	0,75	0,731	1,40	0,920	2,75	1,176	4,5	1,392
0,40	0,804	0,50	0,648	0,80	0,752	1,60	0,973	3,0	1,221	5,0	1,460
0,45	0,894	0,60	0,715	0,85	0,772	2,00	1,076	4,0	1,401	5,5	1,527
0,50	0,964	0,70	0,732	0,90	0,792	3,00	1,328	5,0	1,579	6,0	1,594
0,55	1,044	0,80	0,849	0,95	0,812	4,00	1,373	6,0	1,757	7,0	1,660
0,60	1,124	0,90	0,915	1,00	0,832	5,00	1,828			8,0	1,727
		1,00	0,982	2,00	1,215					9,0	1,861
		2,00	1,949	3,00	1,596					10,0	1,994
		3,00	2,313	4,00	1,977						
		5,00	3,649	5,00	2,350						



TABLE V - (Continuation).

[illegible]

TABLA V - (Continuación).

reD = 1000			reD = 2000			reD = 5000			reD = 10000			reD = 25000		
$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$
1,0x10 <sup>5</sup>	6,173	5,0x10 <sup>5</sup>	5,0x10 <sup>5</sup>	6,975	2,0x10 <sup>6</sup>	7,672	5,0x10 <sup>6</sup>	8,125	2,0x10 <sup>7</sup>	8,818				
1,5x "	6,372	7,0x "	7,0x "	7,142	2,5x "	7,793	5,0x "	8,219	3,0x "	9,021				
2,0x "	6,517	8,0x "	8,0x "	7,210	3,0x "	7,872	7,0x "	8,298	4,0x "	9,168				
2,5x "	6,640	9,0x "	9,0x "	7,274	4,0x "	8,013	8,0x "	8,365	5,0x "	9,281				
3,0x "	6,752	1,0x10 <sup>6</sup>	1,0x10 <sup>6</sup>	7,333	5,0x "	8,127	9,0x "	8,424	6,0x "	9,372				
4,0x "	6,958	1,5x "	1,5x "	7,601	6,0x "	8,226	1,0x10 <sup>7</sup>	8,476	7,0x "	9,448				
5,0x "	7,153	2,0x "	2,0x "	7,851	7,0x "	8,318	1,5x "	8,674	8,0x "	9,513				
6,0x "	7,353	2,5x "	2,5x "	8,101	8,0x "	8,407	2,0x "	8,820	9,0x "	9,570				
7,0x "	7,553	3,0x "	3,0x "	8,351	9,0x "	8,487	2,5x "	8,943	1,0x10 <sup>8</sup>	9,622				
8,0x "	7,753	4,0x "	4,0x "	8,851	1,0x10 <sup>7</sup>	8,567	3,0x "	9,055	1,5x "	9,836				
9,0x "	7,953	5,0x "	5,0x "	9,351	1,5x "	8,987	4,0x "	9,260	2,0x "	10,019				
1,0x10 <sup>6</sup>	8,158	6,0x "	6,0x "	9,851	2,0x "	9,367	5,0x "	9,460	2,5x "	10,177				
1,5x "	9,158	7,0x "	7,0x "	10,351	2,5x "	9,767	6,0x "	9,660	3,0x "	10,377				
2,0x "	10,158	8,0x "	8,0x "	10,851	3,0x "	10,167	7,0x "	9,860	4,0x "	10,657				
2,5x "	11,158	9,0x "	9,0x "	11,351	4,0x "	10,957	8,0x "	10,060	5,0x "	10,977				
3,0x "	12,158	1,0x10 <sup>7</sup>	1,0x10 <sup>7</sup>	11,851	5,0x "	11,757	9,0x "	10,260	6,0x "	11,297				
4,0x "	14,158	1,5x "	1,5x "	14,351	6,0x "	12,567	1,0x10 <sup>8</sup>	10,460	7,0x "	11,617				
5,0x "	15,158	2,0x "	2,0x "	16,851	7,0x "	13,367	1,5x "	11,460	8,0x "	11,937				
6,0x "	18,158	2,5x "	2,5x "	19,351	8,0x "	14,167	2,0x "	12,460	9,0x "	12,257				
7,0x "	20,158	3,0x "	3,0x "	21,851	9,0x "	14,967	2,5x "	13,460	1,0x10 <sup>9</sup>	12,577				
8,0x "	22,158	4,0x "	4,0x "	26,851	1,0x10 <sup>8</sup>	15,767	3,0x "	14,460	1,5x "	14,177				
9,0x "	24,158				1,2x "	17,367	4,0x "	16,460	2,0x "	15,777				
1,0x10 <sup>7</sup>	26,158				1,5x "	19,767	5,0x "	18,460	3,0x "	18,977				
					2,0x "	23,767	6,0x "	20,460	4,0x "	22,177				
					2,5x "	27,767	7,0x "	22,460	5,0x "	25,377				
							8,0x "	24,460						
							9,0x "	26,460						

Fig. 28-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional. Sistema radial limitado (finito). Rata de producción (intrus.  $5n$ ) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado) (Refs.: 7 y 8).



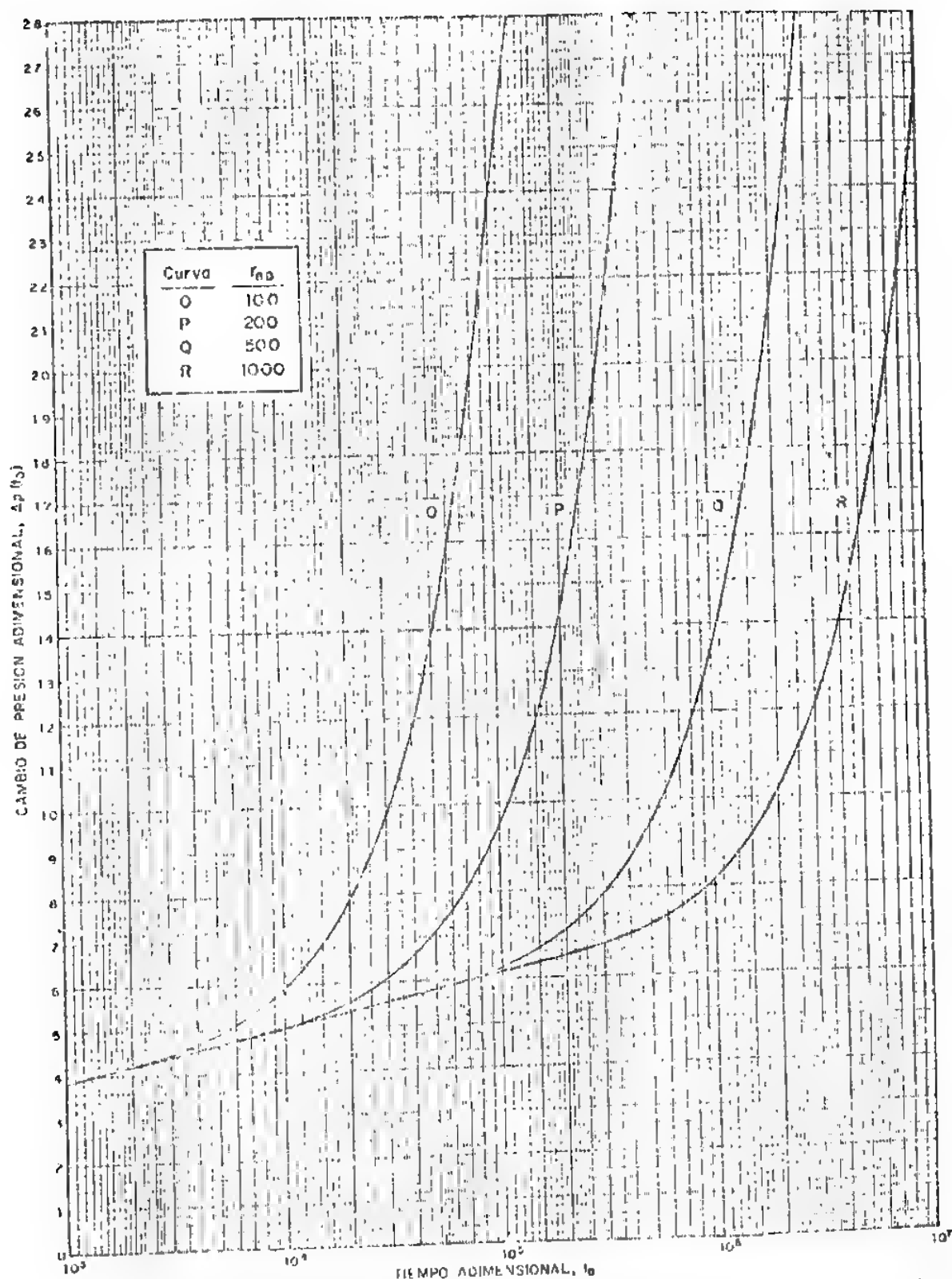


Fig. 29- Cambio de presión adimensional,  $\Delta p(p_b)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial limitado(finito). Rate de intrusión constante en el límite inferior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rate de flujo en el límite exterior igual a cero.

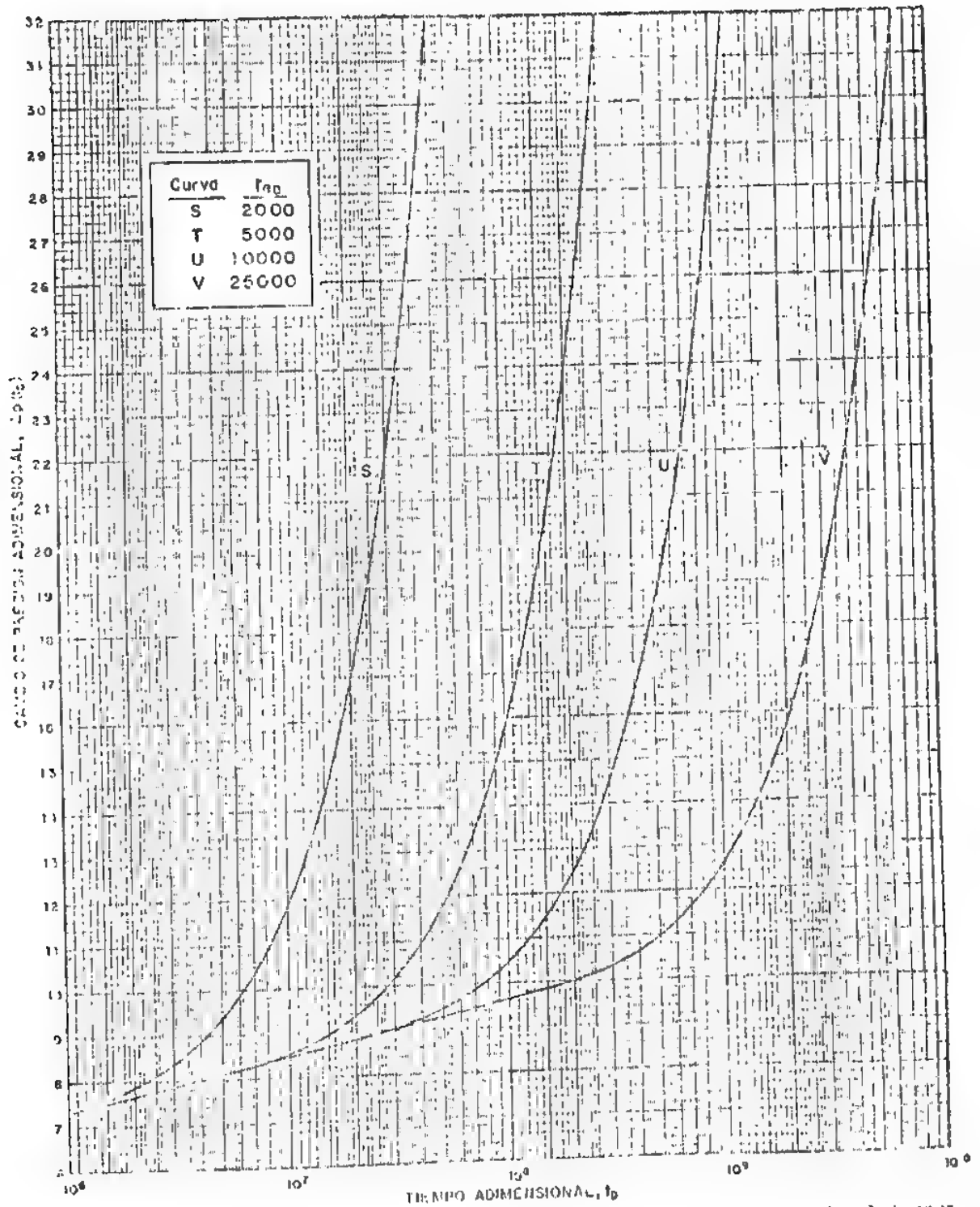


Fig. 33 - Cambio de presión adimensional,  $\Delta p(t_0)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema cerrado al fondo (fuente). Cota de intrusión constante en el límite interior (contacto agua y petróleo) y acuífero cerrado, es decir, ratio de flujo en el límite exterior igual a cero.

$$\Delta p(t_D) = \Delta p(1, t_D) = \ln(r_{eD}) - \frac{2}{r_{eD}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b_n^2 t_D} J_0(b_n)}{b_n^2 J_1^2(b_n r_{eD})} \quad (66)$$

donde  $b_n$  son las raíces de la ecuación,

$$J_0(b_n r_{eD}) = 0 \quad (67)$$

van Everdingen y Hurst<sup>7</sup> presentan cálculos de las Ecs. (64) y (66) como función de  $t_D$ , para diferentes valores de  $r_{eD}$ . Para valores de  $r_{eD}$  entre 1,5 y 50, se calculó según la Ec. (64) y para  $r_{eD}$  entre 60 a 3000 según la Ec. (66). Los resultados se presentan en la Tabla VI y en las Figs. 31 a 34.

Si  $t_D < 0,01$ : usar la Ec. (39) para el cálculo de  $\Delta p(t_D)$ .

Si  $t_D > (r_{eD})^2$ , ocurre flujo continuo, es decir, el valor de  $\Delta p(t_D)$  es máximo y toma en valor constante e igual a,

$$\Delta p(t_D) = \ln(r_{eD}) \quad (68)$$

Caso 5- Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) y acuífero cerrado, es decir, rata de flujo en el límite exterior igual a cero. Analíticamente, las condiciones de límite son:

- a) Igual a la Condición a) del Caso 1
- b) Igual a la Condición b) del Caso 3

La solución para este caso, dada por van Everdingen<sup>7</sup>, permite el cálculo del fluido total que pasa por el límite inferior (contacto agua - petróleo) en un tiempo dado  $t$ ,

TABLA VI - Valores del Cambio de presión Adimensional,  $\Delta p(t_D)$ , como Función del Tiempo Adimensional,  $t_D$ , para Valores de  $re_D$  entre 1,5 y 3000. Caso 4: Acuífero (Yacimiento) Radial Limitado. (Finito). Rata de Intrusión (Producción) Constante en el Límite Interior y Presión Constante en el Límite Exterior. Valores de  $re_D$  entre 1,5 y 50, Ec.(64) y Valores de  $re_D$  entre 50 y 3000, Ec.(66). (Referencias 7 y 8). Figs. 31 a 34.

$re_D = 1,5$			$re_D = 2$			$re_D = 2,5$			$re_D = 3$			$re_D = 3,5$			$re_D = 4$		
$t_D$	$\Delta p(t_D)$		$t_D$	$\Delta p(t_D)$		$t_D$	$\Delta p(t_D)$		$t_D$	$\Delta p(t_D)$		$t_D$	$\Delta p(t_D)$		$t_D$	$\Delta p(t_D)$	
0,050	0,230		0,20	0,424		0,30	0,502		0,50	0,617		0,50	0,620		1,0	0,832	
0,055	0,240		0,22	0,442		0,35	0,535		0,55	0,640		0,60	0,665		1,2	0,857	
0,060	0,249		0,24	0,457		0,40	0,554		0,60	0,662		0,70	0,705		1,4	0,905	
0,070	0,266		0,26	0,472		0,45	0,581		0,70	0,702		0,80	0,741		1,6	0,947	
0,080	0,282		0,28	0,485		0,50	0,616		0,80	0,738		0,90	0,774		1,8	0,986	
0,090	0,292		0,30	0,498		0,55	0,638		0,90	0,770		1,0	0,804		2,0	1,020	
0,10	0,307		0,35	0,527		0,60	0,659		1,0	0,799		1,2	0,853		2,2	1,052	
0,12	0,329		0,40	0,552		0,70	0,696		1,2	0,850		1,4	0,904		2,4	1,080	
0,14	0,344		0,45	0,573		0,80	0,728		1,4	0,892		1,6	0,945		2,6	1,106	
0,16	0,356		0,50	0,591		0,90	0,755		1,6	0,927		1,8	0,991		2,8	1,130	
0,18	0,367		0,55	0,606		1,0	0,778		1,8	0,955		2,0	1,013		3,0	1,152	
0,20	0,375		0,60	0,619		1,2	0,815		2,0	0,980		2,2	1,041		3,4	1,190	
0,22	0,381		0,65	0,630		1,4	0,842		2,2	1,000		2,4	1,065		3,8	1,222	
0,24	0,386		0,70	0,639		1,6	0,861		2,4	1,016		2,6	1,087		4,5	1,266	
0,26	0,390		0,75	0,647		1,8	0,876		2,6	1,030		2,8	1,105		5,0	1,290	
0,28	0,393		0,80	0,654		2,0	0,897		2,8	1,042		3,0	1,123		5,5	1,309	
0,30	0,396		0,85	0,660		2,2	0,895		3,0	1,051		3,5	1,153		6,0	1,325	
0,35	0,400		0,90	0,665		2,4	0,900		3,5	1,069		4,0	1,183		7,0	1,347	
0,40	0,402		0,95	0,669		2,6	0,905		4,0	1,080		5,0	1,215		8,0	1,361	
0,45	0,404		1,0	0,673		2,8	0,908		4,5	1,087		5,0	1,232		9,0	1,370	
0,50	0,405		1,2	0,682		3,0	0,910		5,0	1,091		7,0	1,242		10,0	1,376	
0,60	0,405		1,4	0,686		3,5	0,913		5,5	1,094		8,0	1,247		12,0	1,382	
0,70	0,405		1,6	0,690		4,0	0,915		6,0	1,096		9,0	1,250		14,0	1,385	
0,80	0,405		1,8	0,692		4,5	0,916		6,5	1,097		10,0	1,251		16,0	1,386	
			2,0	0,692		5,0	0,916		7,0	1,097		12,0	1,252		18,0	1,386	
			2,5	0,693		5,5	0,916		8,0	1,098		14,0	1,253				
			3,0	0,693		6,0	0,916		10,0	1,099		15,0	1,253				

TABLA VI (Continuación).

$r_{ED} = 6$			$r_{ED} = 8$			$r_{ED} = 10$			$r_{ED} = 15$			$r_{ED} = 20$			$r_{ED} = 25$		
$\tau_D$	$\Delta p(\tau_D)$		$\tau_D$	$\Delta p(\tau_D)$		$\tau_D$	$\Delta p(\tau_D)$		$\tau_D$	$\Delta p(\tau_D)$		$\tau_D$	$\Delta p(\tau_D)$		$\tau_D$	$\Delta p(\tau_D)$	
7,0	1,275		7,0	1,493		10	1,651		20	1,960		30	2,148		50	2,389	
7,5	1,320		7,5	1,527		12	1,730		22	2,003		35	2,219		55	2,434	
8,0	1,361		8,0	1,554		14	1,798		24	2,043		40	2,282		60	2,476	
8,5	1,398		8,5	1,580		16	1,855		26	2,080		45	2,338		65	2,514	
9,0	1,432		9,0	1,604		18	1,907		28	2,114		50	2,389		70	2,550	
9,5	1,452		9,5	1,627		20	1,952		30	2,146		60	2,475		75	2,583	
10,0	1,490		10,0	1,643		25	2,043		35	2,213		70	2,547		80	2,614	
10,5	1,516		10,5	1,724		30	2,111		40	2,279		80	2,609		85	2,643	
11,0	1,539		11,0	1,768		35	2,160		45	2,232		90	2,658		90	2,671	
11,5	1,561		11,5	1,857		40	2,197		50	2,379		100	2,737		95	2,697	
12,0	1,580		12,0	1,879		45	2,224		55	2,455		105	2,728		100	2,721	
12,5	1,615		12,5	1,914		50	2,245		60	2,513		110	2,747		120	2,807	
13,0	1,667		13,0	1,943		55	2,260		70	2,558		115	2,764		140	2,878	
13,5	1,704		13,5	1,967		60	2,271		80	2,592		120	2,781		160	2,936	
14,0	1,730		14,0	1,986		65	2,279		90	2,619		125	2,795		180	2,984	
14,5	1,749		14,5	2,002		70	2,285		100	2,655		130	2,810		200	3,024	
15,0	1,762		15,0	2,016		75	2,290		120	2,677		135	2,823		220	3,057	
15,5	1,771		15,5	2,040		80	2,293		140	2,689		140	2,835		240	3,085	
16,0	1,777		16,0	2,055		90	2,297		160	2,697		145	2,845		260	3,102	
16,5	1,781		16,5	2,064		100	2,300		180	2,701		150	2,857		280	3,120	
17,0	1,781		17,0	2,070		110	2,301		200	2,704		155	2,876		300	3,142	
17,5	1,781		17,5	2,076		120	2,302		220	2,706		160	2,906		350	3,171	
18,0	1,789		18,0	2,078		130	2,302		240	2,707		180	2,929		400	3,189	
18,5	1,791		18,5	2,079		140	2,302		260	2,707		200	2,958		450	3,200	
19,0	1,792		19,0	2,079		160	2,303		280	2,707		240	2,975		500	3,207	
									300	2,708		260	2,980		600	3,214	
												300	2,992		700	3,217	
												400	2,995		800	3,218	
												500	2,995		900	3,219	

TABLE VI (Continued).

$r_{eD} = 30$			$r_{eD} = 40$			$r_{eD} = 50$			$r_{eD} = 60$			$r_{eD} = 70$			$r_{eD} = 80$		
$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$	$r_D$	$\Delta p(r_D)$	$t_D$
70	2,551	120	2,813	290	3,054	300	3,237	500	3,512	600	3,603	700	3,680	800	3,747	900	3,805
80	2,619	140	2,868	220	3,111	400	3,411	500	3,503	600	3,580	700	3,654	800	3,716	900	3,773
90	2,672	160	2,953	240	3,154	500	3,512	600	3,580	700	3,642	800	3,693	900	3,746	1000	3,795
100	2,723	180	3,011	260	3,193	600	3,562	700	3,612	800	3,663	900	3,714	1000	3,765	1100	3,816
120	2,812	200	3,066	280	3,229	700	3,615	800	3,666	900	3,717	1000	3,768	1100	3,819	1200	3,870
140	2,886	220	3,109	300	3,263	800	3,673	900	3,724	1000	3,775	1100	3,826	1200	3,877	1300	3,928
160	2,950	240	3,152	350	3,339	900	3,732	1000	3,782	1100	3,833	1200	3,884	1300	3,935	1400	3,986
180	2,995	260	3,191	400	3,405	1000	3,832	1200	3,882	1400	3,932	1600	3,982	1800	4,032	2000	4,082
200	2,979	280	3,226	450	3,461	1200	3,908	1600	4,034	1800	4,084	2000	4,134	2200	4,184	2400	4,234
220	2,992	300	3,259	500	3,512	1400	3,959	1800	4,095	2000	4,145	2200	4,195	2400	4,245	2600	4,295
240	3,005	320	3,281	550	3,556	1600	3,989	2000	4,127	2200	4,177	2400	4,227	2600	4,277	2800	4,327
260	3,019	340	3,299	600	3,595	1800	4,033	2200	4,171	2400	4,211	2600	4,251	2800	4,291	3000	4,331
280	3,032	360	3,319	650	3,629	2000	4,071	2400	4,209	2600	4,249	2800	4,289	3000	4,329	3200	4,369
300	3,045	380	3,332	700	3,661	2500	4,084	3000	4,237	3500	4,288	4000	4,339	4500	4,390	5000	4,441
320	3,058	400	3,349	750	3,688	3000	4,094	3500	4,242	4000	4,293	4500	4,344	5000	4,395	5500	4,446
400	3,066	500	3,354	800	3,713	3500	4,100	4000	4,247	4500	4,298	5000	4,349	5500	4,399	6000	4,450
420	3,072	520	3,358	850	3,725	4000	4,103	4500	4,249	5000	4,299	5500	4,350	6000	4,400	6500	4,451
440	3,077	540	3,361	900	3,734	4500	4,106	5000	4,250	5500	4,300	6000	4,351	6500	4,401	7000	4,452
460	3,081	560	3,364	950	3,741	5000	4,108	5500	4,251	6000	4,301	6500	4,352	7000	4,402	7500	4,453
480	3,084	580	3,366	1000	3,747	5500	4,109	6000	4,252	6500	4,302	7000	4,353	7500	4,403	8000	4,454
500	3,087	600	3,368	1050	3,752	6000	4,110	6500	4,253	7000	4,303	7500	4,354	8000	4,404	8500	4,455
520	3,089	620	3,370	1100	3,756	6500	4,111	7000	4,254	7500	4,304	8000	4,355	8500	4,405	9000	4,456
540	3,091	640	3,372	1150	3,759	7000	4,112	7500	4,255	8000	4,305	8500	4,356	9000	4,406	9500	4,457
560	3,093	660	3,374	1200	3,762	7500	4,113	8000	4,256	8500	4,306	9000	4,357	9500	4,407	10000	4,458
580	3,095	680	3,376	1250	3,765	8000	4,114	8500	4,257	9000	4,307	9500	4,358	10000	4,408	10500	4,459
600	3,097	700	3,378	1300	3,767	8500	4,115	9000	4,258	9500	4,308	10000	4,359	10500	4,409	11000	4,460
620	3,099	720	3,380	1350	3,769	9000	4,116	9500	4,259	10000	4,309	10500	4,360	11000	4,410	11500	4,461
640	3,101	740	3,382	1400	3,771	9500	4,117	10000	4,260	10500	4,310	11000	4,361	11500	4,411	12000	4,462
660	3,103	760	3,384	1450	3,773	10000	4,118	10500	4,261	11000	4,311	11500	4,362	12000	4,412	12500	4,463
680	3,105	780	3,386	1500	3,775	10500	4,119	11000	4,262	11500	4,312	12000	4,363	12500	4,413	13000	4,464
700	3,107	800	3,388	1550	3,777	11000	4,120	11500	4,263	12000	4,313	12500	4,364	13000	4,414	13500	4,465
720	3,109	820	3,390	1600	3,779	11500	4,121	12000	4,264	12500	4,314	13000	4,365	13500	4,415	14000	4,466
740	3,111	840	3,392	1650	3,781	12000	4,122	12500	4,265	13000	4,315	13500	4,366	14000	4,416	14500	4,467
760	3,113	860	3,394	1700	3,783	12500	4,123	13000	4,266	13500	4,316	14000	4,367	14500	4,417	15000	4,468
780	3,115	880	3,396	1750	3,785	13000	4,124	13500	4,267	14000	4,317	14500	4,368	15000	4,418	15500	4,469
800	3,117	900	3,398	1800	3,787	13500	4,125	14000	4,268	14500	4,318	15000	4,369	15500	4,419	16000	4,470
820	3,119	920	3,400	1850	3,789	14000	4,126	14500	4,269	15000	4,319	15500	4,370	16000	4,420	16500	4,471
840	3,121	940	3,402	1900	3,791	14500	4,127	15000	4,270	15500	4,320	16000	4,371	16500	4,421	17000	4,472
860	3,123	960	3,404	1950	3,793	15000	4,128	15500	4,271	16000	4,321	16500	4,372	17000	4,422	17500	4,473
880	3,125	980	3,406	2000	3,795	15500	4,129	16000	4,272	16500	4,322	17000	4,373	17500	4,423	18000	4,474
900	3,127	1000	3,408	2050	3,797	16000	4,130	16500	4,273	17000	4,323	17500	4,374	18000	4,424	18500	4,475
920	3,129	1020	3,410	2100	3,799	16500	4,131	17000	4,274	17500	4,324	18000	4,375	18500	4,425	19000	4,476
940	3,131	1040	3,412	2150	3,801	17000	4,132	17500	4,275	18000	4,325	18500	4,376	19000	4,426	19500	4,477
960	3,133	1060	3,414	2200	3,803	17500	4,133	18000	4,276	18500	4,326	19000	4,377	19500	4,427	20000	4,478
980	3,135	1080	3,416	2250	3,805	18000	4,134	18500	4,277	19000	4,327	19500	4,378	20000	4,428	20500	4,479
1000	3,137	1100	3,418	2300	3,807	18500	4,135	19000	4,278	19500	4,328	20000	4,379	20500	4,429	21000	4,480
1020	3,139	1120	3,420	2350	3,809	19000	4,136	19500	4,279	20000	4,329	20500	4,380	21000	4,430	21500	4,481
1040	3,141	1140	3,422	2400	3,811	19500	4,137	20000	4,280	20500	4,330	21000	4,381	21500	4,431	22000	4,482
1060	3,143	1160	3,424	2450	3,813	20000	4,138	20500	4,281	21000	4,331	21500	4,382	22000	4,432	22500	4,483
1080	3,145	1180	3,426	2500	3,815	20500	4,139	21000	4,282	21500	4,332	22000	4,383	22500	4,433	23000	4,484
1100	3,147	1200	3,428	2550	3,817	21000	4,140	21500	4,283	22000	4,333	22500	4,384	23000	4,434	23500	4,485
1120	3,149	1220	3,430	2600	3,819	21500	4,141	22000	4,284	22500	4,334	23000	4,385	23500	4,435	24000	4,486
1140	3,151	1240	3,432	2650	3,821	22000	4,142	22500	4,285	23000	4,335	23500	4,386	24000	4,436	24500	4,487
1160	3,153	1260	3,434	2700	3,823	22500	4,143	23000	4,286	23500	4,336	24000	4,387	24500	4,437	25000	4,488
1180	3,155	1280	3,436	2750	3,825	23000	4,144	23500	4,287	24000	4,337	24500	4,388	25000	4,438	25500	4,489
1200	3,157	1300	3,438	2800	3,827	23500	4,145	24000	4,288	24500	4,338	25000	4,389	25500	4,439	26000	4,490
1220	3,159	1320	3,440	2850	3,829	24000	4,146	24500	4,289	25000	4,339	25500	4,390	26000	4,440	26500	4,491
1240	3,161	1340	3,442	2900	3,831	24500	4,147	25000	4,290	25500	4,340	26000	4,391	26500	4,441	27000	4,492
1260	3,163	1360	3,444	2950	3,833	25000	4,148	25500	4,291	26000	4,341	26500	4,392	27000	4,442	27500	4,493
1280	3,165	1380	3,446	3000	3,835	25500	4,149	26000	4,292	26500	4,342	27000	4,393	27500	4,443	28000	4,494
1300	3,167	1400	3,448	3050	3,837	26000	4,150	26500	4,293	27000	4,343	27500	4,394	28000	4,444	28500	4,495
1320	3,169	1420	3,450	3100	3,839	26500	4,151	27000	4,294	27500	4,344	28000	4,395	28500	4,445	29000	4,496
1340	3,171	1440	3,452	3150	3,841	27000	4,152	27500	4,295	28000	4,345	28500	4,396	29000	4,446	29500	4,497
1360	3,173	1460	3,454	3200	3,843	27500	4,153	28000	4,296	28500	4,346	29000	4,397	29500	4,447	30000	4,498
1380	3,175	1480	3,456	3250	3,845	28000	4,154	28500	4,297	29000	4,347	29500	4,398	30000	4,448	30500	4,499
1400	3,177	1500	3,458	3300	3,847	28500	4,155	29000	4,298	29500	4,348	30000	4,399	30500	4,449	31000	4,500
1420	3,179	1520	3,460	3350	3,849	29000	4,156	29500	4,299	30000	4,349	30500	4,400	31000	4,450	31500	4,501
1440	3,181	1540	3,462	3400	3,851	29500	4,157	30000	4,300	30500	4,350	31000	4,401	31500	4,451	32000	4,502
1460	3,183	1560	3,4														







TABLE VI (Continued).

[illegible]



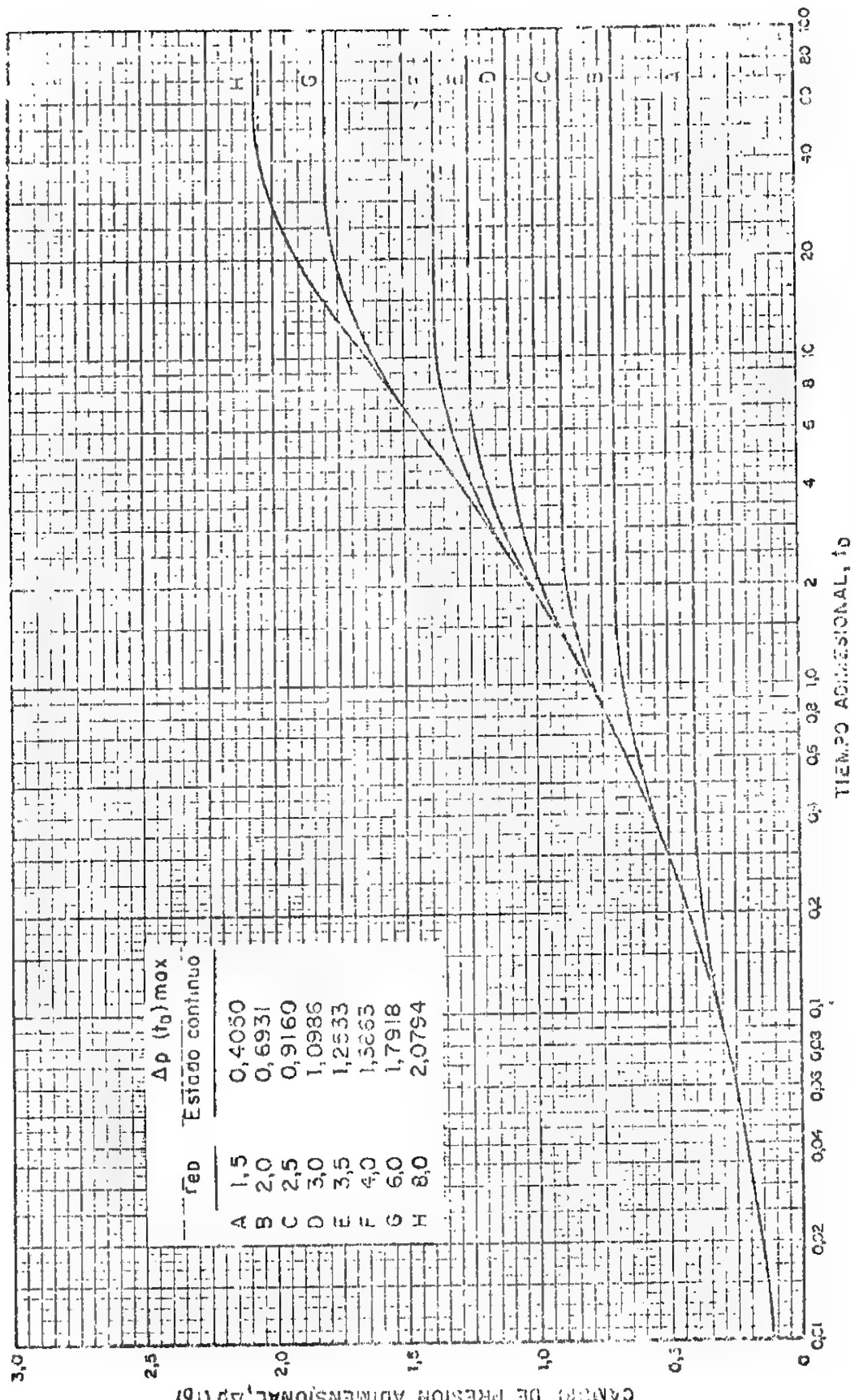


Fig. 31- Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial limitado (finito). Rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 1,5 a 8,0. (Refers 7y8).

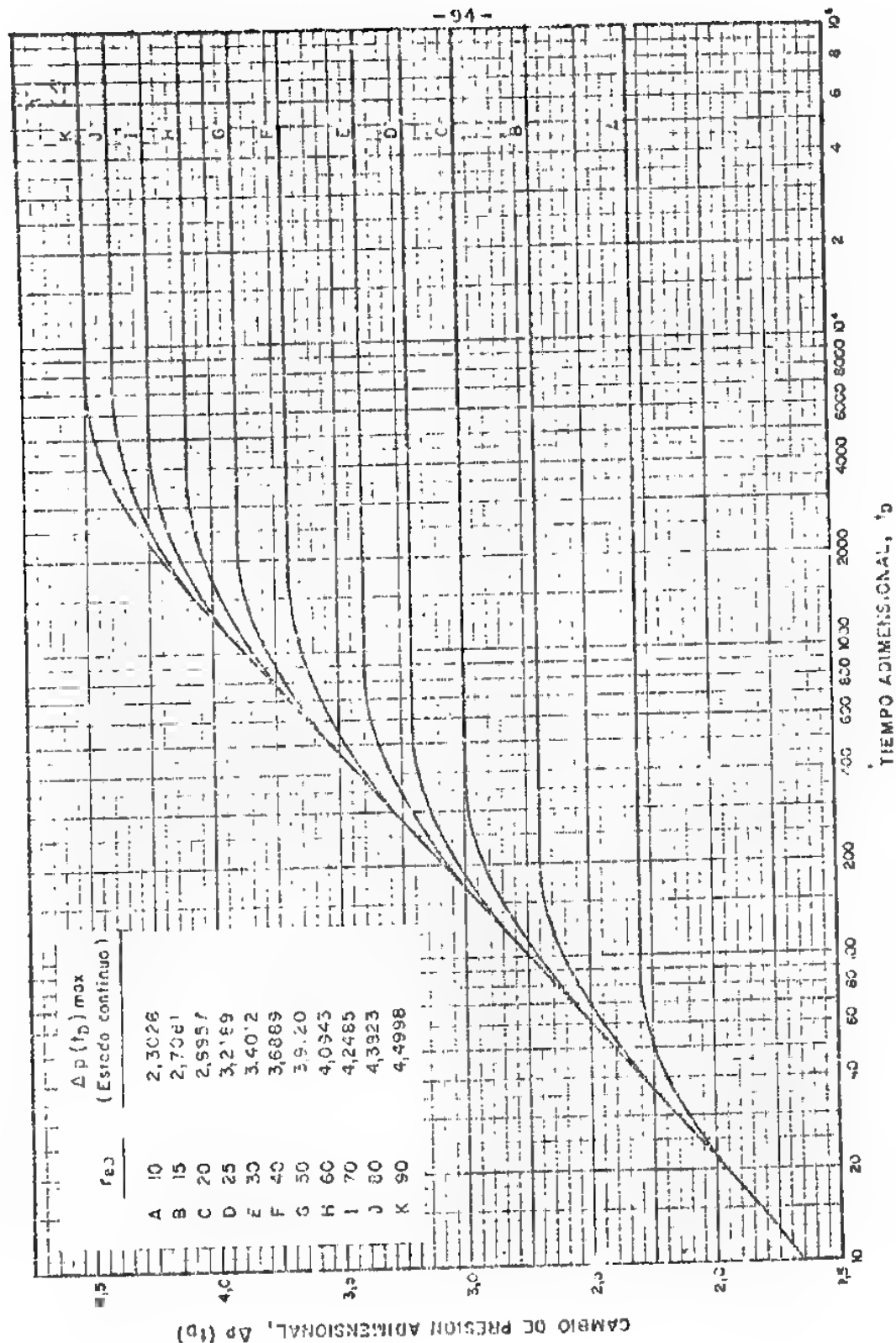


Fig. 32-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial limitado (finito), rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 10 a 90. (Refs. 7 y 8).

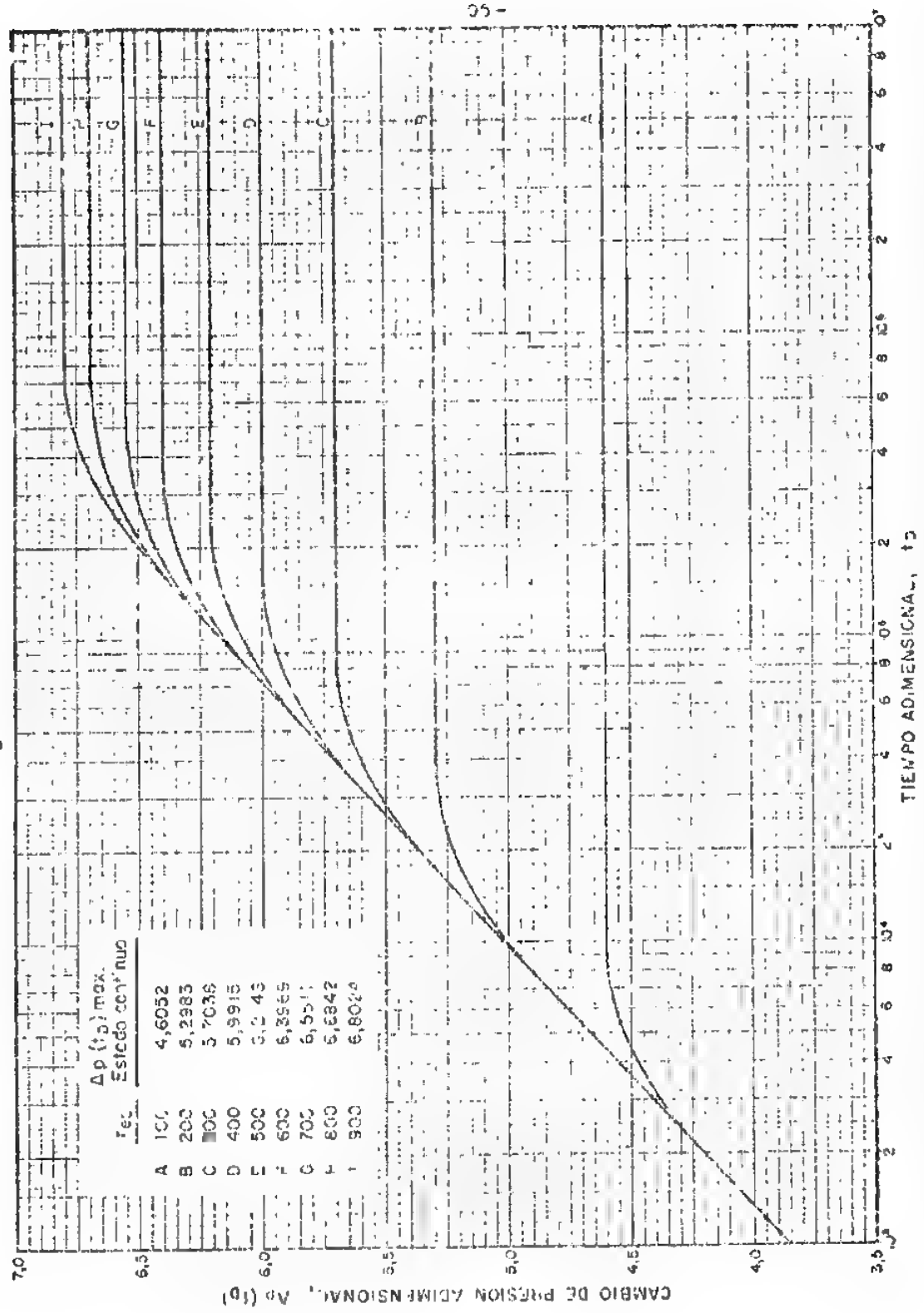


Fig. 33-Combo de presión adimensional como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial limitado (finito), rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 100 a 900. (Refs. 7 y 8).

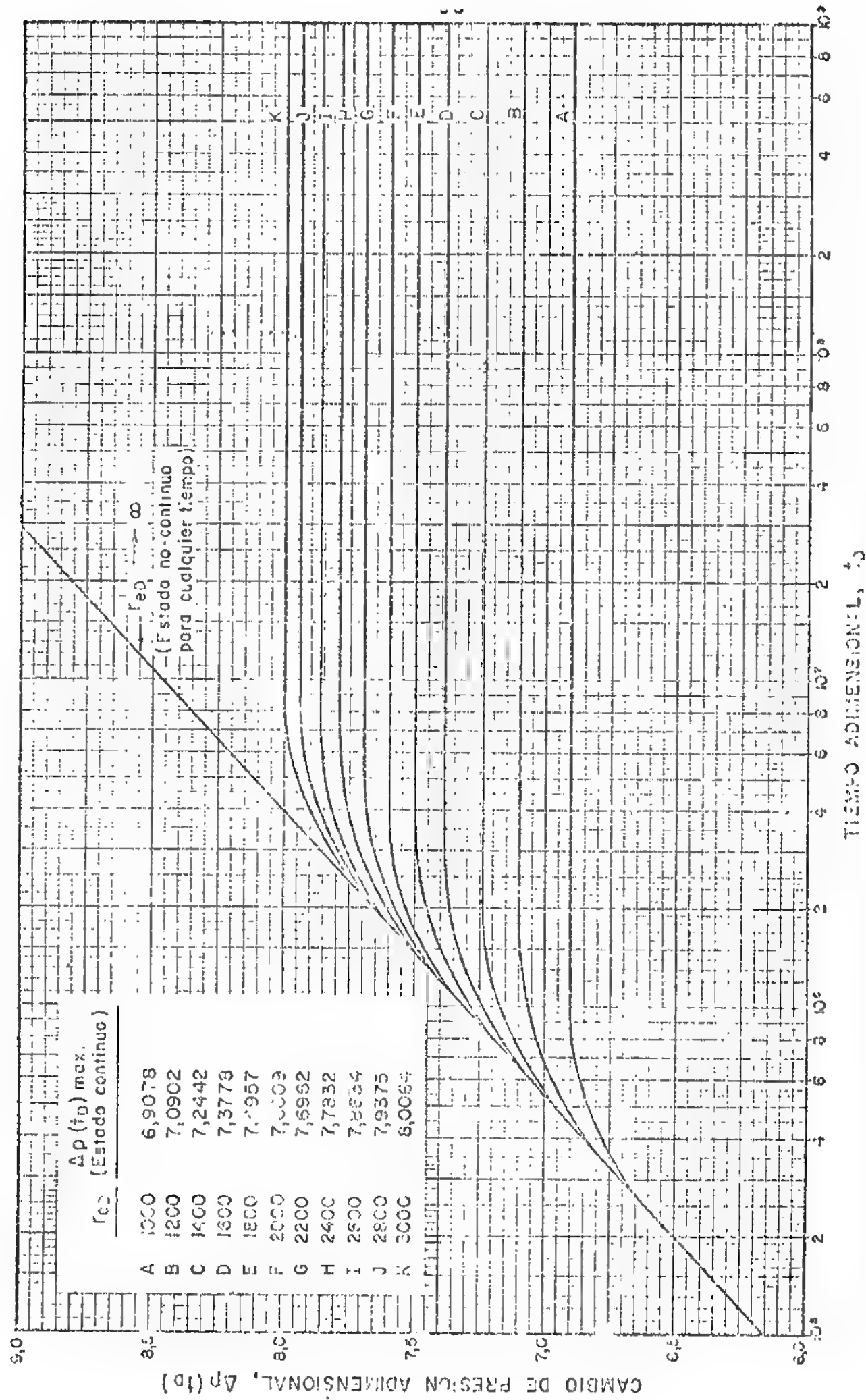


Fig. 34-Cambio de presión adimensional como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema radial limitado (finito), rata de producción (intrusión) constante y presión constante en el límite exterior. Radio adimensional de 1000 a 3000 (Refs 7 y 8).

$$W(R_i, t) = W_e = 1,119 \phi c h R_i^2 \frac{0^\circ}{360^\circ} Q(t_D) \quad (69)$$

donde,

$$Q(t_D) = Q(1, t_D) = \frac{(r_{eD})^2 - 1}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 t_D} J_1^2(a_n r_{eD})}{a_n^2 [J_0^2(a_n) - J_1^2(a_n r_{eD})]} \quad (70)$$

donde  $a_n$  son las raíces de la ecuación,

$$J_1(a_n r_{eD}) Y_0(a_n) - Y_1(a_n r_{eD}) J_0(a_n) = 0 \quad (71)$$

Si  $t_D < 0,01$ : Usar la Ec.(52) para calcular  $Q(t_D)$ .

Si  $t_D \geq 0,5(r_{eD})^2$ , ocurre flujo continuo, es decir, el valor de  $Q(t_D)$  es máximo y toma un valor constante calculado por,

$$Q(t_D) = \frac{(r_{eD})^2 - 1}{2} \quad (72)$$

Los valores de  $Q(t_D)$  son dados por  $vEH^7$ , para  $r_{eD}$  entre 1,5 y 10 y en la Referencia 31 para  $r_{eD}$  entre 20 y  $10^6$ . Los resultados se representan en la Tabla VII y Figs. 35 a 46.

Caso 6 - Presión constante en el límite interior (contacto agua-petróleo) lo mismo que en el límite exterior. Analíticamente, las condiciones de límite son:

a) Igual a la Condición a) del Caso 2

b) Igual a la Condición b) del Caso 4.

Este caso fué resuelto por Mueller<sup>21</sup> y permite el cálculo del fluido total que pasa por el límite interior ( $r_D = 1$ ) en un tiempo dado  $t$ , usando la Ec.(51), donde el valor de  $Q(t_D)$  fué calculado por computadora.

TABLA VII - Valores de Intrusión Adimensional,  $Q(t_D)$ , como Función de Tiempo Adimensional,  $t_D$ , para Valores de  $r_{eD}$  entre 1,5 y 10<sup>6</sup>. Caso 5: Acuífero (yacimiento) Radial Limitado (finito). Presión en el Límite Interior Constante y Rata de Producción en el Límite Exterior Igual a Cero (Acuífero Cerrado). Valores de  $r_{eD}$  entre 1,5 y 10, Fc. (70), Referencia 7 y 8; los demás Valores, Referencia 31. Figs. 35 a 46.

$r_{eD} = 1,5$		$r_{eD} = 2,0$		$r_{eD} = 2,5$		$r_{eD} = 3,0$	
$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
0,050	0,276	0,050	0,278	0,10	0,408	0,30	0,755
0,060	0,304	0,075	0,345	0,15	0,509	0,40	0,895
0,070	0,330	0,100	0,404	0,20	0,599	0,50	1,023
0,080	0,354	0,125	0,458	0,25	0,681	0,60	1,143
0,090	0,375	0,150	0,507	0,30	0,758	0,70	1,256
0,10	0,395	0,175	0,553	0,35	0,829	0,80	1,363
0,11	0,414	0,200	0,597	0,40	0,897	0,90	1,465
0,12	0,431	0,225	0,638	0,45	0,962	0,100	1,563
0,13	0,446	0,250	0,678	0,50	1,024	0,125	1,791
0,14	0,461	0,275	0,715	0,55	1,083	0,150	1,997
0,15	0,474	0,300	0,751	0,60	1,140	0,175	2,184
0,16	0,486	0,325	0,785	0,65	1,195	0,200	2,353
0,17	0,497	0,350	0,817	0,70	1,248	0,225	2,507
0,18	0,507	0,375	0,848	0,75	1,299	0,250	2,646
0,19	0,517	0,400	0,877	0,80	1,348	0,275	2,772
0,20	0,525	0,425	0,905	0,85	1,395	0,300	2,886
0,21	0,533	0,450	0,932	0,90	1,440	0,325	2,990
0,22	0,541	0,475	0,958	0,95	1,484	0,350	3,084
0,23	0,548	0,500	0,983	0,10	1,526	0,375	3,170
0,24	0,554	0,550	1,028	0,11	1,605	0,400	3,247
0,25	0,559	0,600	1,070	0,12	1,679	0,425	3,317
0,26	0,565	0,650	1,108	0,13	1,747	0,450	3,381
0,28	0,574	0,700	1,143	0,14	1,811	0,475	3,439
0,30	0,582	0,750	1,174	0,15	1,870	0,500	3,491
0,32	0,588	0,800	1,203	0,16	1,924	0,550	3,581
0,34	0,594	0,900	1,253	0,17	1,975	0,600	3,656
0,36	0,599	0,100	1,295	0,18	2,022	0,650	3,717
0,38	0,603	0,11	1,330	0,20	2,106	0,700	3,767
0,40	0,606	0,12	1,358	0,22	2,178	0,750	3,809
0,45	0,613	0,13	1,382	0,24	2,241	0,800	3,843
0,50	0,617	0,14	1,402	0,26	2,294	0,900	3,894
0,60	0,621	0,16	1,432	0,28	2,340	0,100	3,928
0,70	0,623	0,17	1,454	0,30	2,380	0,110	3,951
0,80	0,624	0,18	1,453	0,34	2,244	0,120	3,967
		0,20	1,468	0,38	2,491	0,140	3,985
		0,25	1,487	0,42	2,525	0,160	3,993
		0,30	1,495	0,45	2,551	0,180	3,997
		0,40	1,499	0,50	2,570	0,200	3,999
		0,50	1,500	0,60	2,579	0,220	3,999
				0,70	2,613	0,240	4,000
				0,80	2,619		
				0,90	2,622		
				0,10	2,624		



TABLA VII (Continuación).

$r_{eD} = 3,5$		$r_{eD} = 4,0$		$r_{eD} = 4,5$		$r_{eD} = 5,0$	
$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
1,00	1,571	2,00	2,442	2,5	2,835	3,0	3,195
1,20	1,761	2,20	2,598	3,0	3,196	3,5	3,542
1,40	1,940	2,40	2,748	3,5	3,537	4,0	3,875
1,60	2,111	2,60	2,893	4,0	3,959	4,5	4,193
1,80	2,273	2,80	3,034	4,5	4,165	5,0	4,499
2,00	2,427	3,00	3,170	5,0	4,454	5,5	4,792
2,20	2,574	3,25	3,334	5,5	4,727	6,0	5,074
2,40	2,715	3,50	3,493	6,0	4,986	6,5	5,345
2,60	2,849	3,75	3,645	6,5	5,231	7,0	5,605
2,80	2,976	4,00	3,792	7,0	5,464	7,5	5,854
3,00	3,098	4,25	3,932	7,5	5,684	8,0	6,094
3,25	3,242	4,50	4,068	8,0	5,892	8,5	6,325
3,50	3,379	4,75	4,198	8,5	6,089	9,0	6,547
3,75	3,507	5,00	4,323	9,0	6,276	9,5	6,756
4,00	3,628	5,50	4,560	9,5	6,453	10	6,955
4,25	3,742	6,00	4,779	10	6,621	11	7,350
4,50	3,850	6,50	4,982	11	6,790	12	7,706
4,75	3,951	7,00	5,169	12	7,208	13	8,035
5,00	4,047	7,50	5,343	13	7,457	14	8,339
5,50	4,222	8,00	5,504	14	7,620	15	8,620
6,00	4,378	8,50	5,653	15	7,880	16	8,879
6,50	4,516	9,00	5,790	16	8,060	18	9,338
7,00	4,639	9,50	5,917	18	8,365	20	9,371
7,50	4,749	10	6,035	20	8,611	22	10,07
8,00	4,846	11	6,246	22	8,809	24	10,35
8,50	4,932	12	6,425	24	8,968	26	10,59
9,00	5,009	13	6,580	26	9,097	28	10,80
9,50	5,078	14	6,712	28	9,200	30	10,98
10,00	5,138	15	6,825	30	9,283	34	11,26
11	5,241	16	6,922	34	9,404	38	11,46
12	5,321	17	7,004	38	9,461	42	11,61
13	5,385	18	7,076	42	9,532	45	11,71
14	5,435	20	7,159	45	9,565	50	11,79
15	5,476	22	7,272	50	9,586	60	11,91
16	5,506	24	7,332	60	9,617	70	11,96
17	5,531	26	7,377	70	9,641	80	11,98
18	5,551	30	7,434	80	9,623	90	11,99
20	5,579	34	7,464	90	9,624	100	12,00
25	5,611	38	7,481	100	9,625	120	12,0
30	5,621	42	7,490				
35	5,624	46	7,494				
40	5,625	50	7,497				

TABLA VII (Continuación).

$ReD = 6$		$ReD = 7$		$ReD = 8$		$ReD = 9$	
$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
6,0	5,148	9,0	6,861	9	6,861	10	7,417
6,5	5,440	9,5	7,127	10	7,398	15	9,945
7,0	5,724	10	7,389	11	7,920	20	12,26
7,5	6,002	11	7,902	12	8,431	22	13,13
8,0	6,273	12	8,397	13	8,930	24	14,98
8,5	6,537	13	8,876	14	9,418	26	16,79
9,0	6,795	14	9,341	15	9,895	28	18,59
9,5	7,047	15	9,791	16	10,361	30	19,35
10,0	7,293	16	10,23	17	10,82	32	20,10
10,5	7,533	17	10,65	18	11,26	34	21,82
11	7,767	18	11,06	19	11,70	36	23,52
12	8,220	19	11,46	20	12,13	38	25,19
13	8,651	20	11,85	22	12,95	40	26,85
14	9,063	22	12,58	24	13,74	42	28,48
15	9,456	24	13,27	26	14,50	44	30,09
16	9,829	26	13,92	28	15,23	46	31,69
17	10,19	28	14,53	30	15,92	48	33,26
18	10,53	30	15,11	34	17,22	50	34,82
19	10,85	35	16,30	38	18,41	52	36,36
20	11,16	38	18,41	40	19,97	54	37,89
22	11,74	45	19,43	45	20,26	56	39,39
24	12,26	50	19,24	50	21,42	58	40,88
25	12,50	60	20,51	55	22,46	60	42,36
31	13,74	70	21,45	60	23,40	65	44,48
35	14,40	80	22,13	70	24,98	70	47,52
39	14,93	90	22,63	80	26,26	75	49,48
51	16,05	100	23,00	90	27,28	80	51,36
60	16,56	120	23,47	100	28,11	85	53,18
70	16,91	140	23,71	120	29,31	90	54,93
80	17,14	160	23,85	140	30,08	95	56,63
90	17,27	180	23,92	160	30,58	100	58,27
100	17,35	200	23,96	180	30,91	120	64,39
110	17,41	500	24,00	200	31,12	140	69,92
120	17,45			240	31,34	160	74,04
130	17,46			280	31,43	180	77,85
140	17,48			320	31,47	200	81,44
150	17,49			360	31,49	240	89,17
160	17,49			400	31,50	280	95,56
180	17,50			500	31,50	320	99,77
200	17,50					360	103,83
220	17,50					400	107,94
						440	111,97
						480	115,98

TABLA VII (Continuación).

$ReD = 10$		$ReD = 20$		$ReD = 50$		$ReD = 100$	
$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
15	9,965	100	42,91	600	139	2000	532
20	12,32	130	52,76	800	241	3000	757
22	13,22	160	61,98	1000	290	4000	969
24	14,09	200	73,38	1300	359	5000	1171
26	14,95	240	83,83	1600	423	6000	1363
28	15,78	300	97,91	2000	502	8000	1718
30	16,59	400	117,7	2400	573	10000	2008
32	17,38	500	133,6	3000	667	13000	2460
34	18,16	600	146,4	4000	795	16000	2820
36	18,91	700	156,7	5000	895	20000	3230
38	19,65	800	165,1	6000	974	24000	3560
40	20,37	1000	177,1	8000	1032	30000	3940
42	21,07	1300	187,8	10000	1148	40000	4370
44	21,76	1600	193,4	13000	1201	50000	4623
46	22,42	2000	196,9	16000	1227	60000	4770
48	23,07	3000	199,2	20000	1241	80000	4920
50	23,71			24000	1246	100000	4970
52	24,33			30000	1249	110000	4980
54	24,94						
56	25,53						
58	26,11						
60	26,67						
65	28,02						
70	29,29						
75	30,49						
80	31,61						
85	32,67						
90	33,66						
95	34,60						
100	35,48						
120	38,51						
140	40,89						
160	42,75						
180	44,21						
200	45,36						
240	46,95						
280	47,94						
320	48,54						
360	48,91						
400	49,14						
440	49,28						
480	49,36						

TABLA VII (Continuación).

$r_{eD} = 200$		$r_{eD} = 500$		$r_{eD} = 1000$		$r_{eD} = 2000$	
$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
10000	2190	100000	17500	3 $\times 10^4$	5890	4 $\times 10^5$	62700
13000	2770	130000	22100	4 $\times$ "	7640	5 $\times$ "	77000
16000	3330	160000	26500	5 $\times$ "	9350	6 $\times$ "	91100
20000	4040	200000	32100	1 $\times 10^5$	17600	7 $\times$ "	105000
24000	4720	240000	37300	2 $\times$ "	33200	8 $\times$ "	119000
30000	5690	300000	44700	3 $\times$ "	48000	9 $\times$ "	133000
40000	7170	400000	55600	4 $\times$ "	62400	1 $\times 10^6$	146000
50000	8500	500000	65000	5 $\times$ "	76400	1,3 $\times$ "	106000
60000	9680	600000	73100	6 $\times$ "	89300	1,6 $\times$ "	225000
80000	11700	800000	86200	7 $\times$ "	103000	2 $\times$ "	276000
100000	13300	1000000	96000	8 $\times$ "	116000	2,4 $\times$ "	326000
130000	15200	1300000	106000	9 $\times$ "	128000	3 $\times$ "	337000
160000	16500	1600000	113000	1 $\times 10^6$	140000	4 $\times$ "	510000
200000	17800	2000000	118000	1,4 $\times$ "	183000	5 $\times$ "	614000
240000	18600	2400000	121000	2 $\times$ "	239000	7 $\times$ "	802000
300000	19200	3000000	123000	2,4 $\times$ "	271000	1 $\times 10^7$	1040000
400000	19700	4000000	125000	3 $\times$ "	311000	1,3 $\times$ "	1230000
500000	19900	5000000	125000	4 $\times$ "	363000	1,7 $\times$ "	1520000
				5 $\times$ "	401000	2 $\times$ "	1530000
				7 $\times$ "	448000	2,4 $\times$ "	1650000
				8,4 $\times$ "	467000	3 $\times$ "	1780000
				1 $\times 10^7$	480000	4 $\times$ "	1890000
				1,4 $\times$ "	495000	5 $\times$ "	1950000
				2 $\times$ "	499000	7 $\times$ "	1990000
				3 $\times$ "	500000	1 $\times 10^8$	2000000
						1,3 $\times$ "	2000000

TABLA VII (Continuación).

$r_{eD} = 4000$		$r_{eD} = 10000$		$r_{eD} = 25000$	
$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
$1,6 \times 10^6$	$2,26 \times 10^5$	$3 \times 10^6$	$4,06 \times 10^5$	$6 \times 10^7$	$6,77 \times 10^6$
2 x "	2,78x "	4 x "	5,31x "	7 x "	7,83x "
2,4x "	3,30x "	5 x "	6,76x "	8 x "	8,86x "
3 x "	4,06x "	6 x "	7,76x "	9 x "	9,93x $10^7$
4 x "	5,31x "	8 x "	1,02x "	1 x $10^8$	1,10x "
5 x "	6,54x "	1 x $10^7$	1,25x "	1,4x "	1,51x "
6 x "	7,74x "	1,2x "	1,49x "	2 x "	2,11x "
8 x "	$1,01 \times 10^6$	1,4x "	$1,72 \times 10^6$	2,6x "	2,70x "
1 x $10^7$	1,24x "	1,6x "	1,95x "	3 x "	3,09x "
1,2x "	1,46x "	1,8x "	2,17x "	3,3x "	3,37x "
1,4x "	1,67x "	2 x "	2,40x "	3,6x "	3,56x "
1,6x "	1,87x "	2,4x "	2,85x "	4 x "	4,03x "
1,3x "	2,07x "	3 x "	3,51x "	4,4x "	4,40x "
2 x "	2,27x "	4 x "	4,60x "	5 x "	4,94x "
2,3x "	2,54x "	5 x "	5,55x "	5,4x "	5,30x "
3 x "	3,14x "	7 x "	7,70x "	6 x "	5,82x "
4 x "	3,88x "	8 x "	8,69x "	6,4x "	6,17x "
5 x "	4,51x "	9 x "	9,65x "	7 x "	6,67x "
7 x "	5,49x "	1 x $10^8$	$1,06 \times 10^7$	7,4x "	7,01x "
8 x "	5,87x "	1,2x "	1,24x "	8 x "	7,50x "
9 x "	6,20x "	1,4x "	1,41x "	8,4x "	7,82x "
1 x $10^8$	6,47x "	1,7x "	1,66x "	9 x "	8,29x "
1,2x "	6,90x "	2 x "	1,93x "	1 x $10^9$	9,06x "
1,4x "	7,21x "	2,4x "	2,17x "	1,3x "	$1,12 \times 10^8$
1,7x "	7,52x "	3 x "	2,54x "	1,6x "	1,32x "
2 x "	7,71x "	4 x "	3,06x "	2 x "	1,55x "
2,3x "	7,82x "	5 x "	3,47x "	2,4x "	1,75x "
2,6x "	7,89x "	6 x "	3,79x "	3 x "	2,00x "
3 x "	7,94x "	7 x "	4,04x "	4 x "	2,33x "
4 x "	7,99x "	8 x "	4,24x "	5 x "	2,56x "
5 x "	8,00x "	1 x $10^9$	4,53x "	6 x "	2,72x "
		1,4x "	4,82x "	8 x "	2,92x "
		2 x "	4,96x "	1 x $10^{10}$	3,02x "
		3 x "	5,00x "	1,4x "	3,10x "
				2 x "	3,12x "
				3 x "	3,12x "

TABLA VII (Continuación).

$r_{ed} = 100000$		$r_{ed} = 250000$		$r_{ed} = 1000000$	
$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$	$t_D$	$Q(t_D)$
3 $\times 10^8$	3,10 $\times 10^7$	5 $\times 10^9$	4,51 $\times 10^8$	1 $\times 10^{11}$	7,95 $\times 10^9$
3,5x "	3,59x "	6 x "	5,37x "	1,3x "	1,02 $\times 10^{10}$
4 x "	4,07x "	7 x "	6,22x "	1,6x "	1,25x "
5 x "	5,03x "	8 x "	7,07x "	2 x "	1,55x "
6 x "	5,98x "	1 $\times 10^{10}$	8,75x "	2,4x "	1,84x "
7 x "	6,93x "	1,4x "	1,21 $\times 10^9$	3 x "	2,28x "
8 x "	7,87x "	2 x "	1,70x "	4 x "	3,01x "
8,4x "	8,24x "	3 x "	2,49x "	5 x "	3,72x "
9 x "	8,80x "	4 x "	3,27x "	6 x "	4,42x "
1 $\times 10^9$	9,73x "	4,4x "	3,58x "	7 x "	5,11x "
1,4x "	1,34 $\times 10^8$	4,7x "	3,80x "	8 x "	5,80x "
2 x "	1,88x "	5 x "	4,03x "	1 $\times 10^{10}$	7,13x "
3 x "	2,77x "	5,4x "	4,32x "	1,2x "	8,42x "
4 x "	3,64x "	6 x "	4,76x "	1,4x "	9,67x "
5 x "	4,49x "	7 x "	5,48x "	1,5x "	1,03 $\times 10^{11}$
6 x "	5,33x "	7,4x "	5,76x "		
7 x "	6,15x "	8 x "	6,17x "		
8 x "	6,95x "	8,4x "	6,42x "		
9 x "	7,75x "	9 x "	6,85x "		
1 $\times 10^{10}$	8,52x "	1 $\times 10^{11}$	7,51x "		
1,3x "	1,08 $\times 10^9$	1,1x "	8,15x "		
1,6x "	1,29x "	1,3x "	9,08x "		
2 x "	1,56x "	1,6x "	1,11 $\times 10^{10}$		
2,4x "	1,80x "	2 x "	1,32x "		
3 x "	2,14x "	2,4x "	1,51x "		
4 x "	2,62x "	3 x "	1,75x "		
5 x "	3,03x "	4 x "	2,08x "		
6 x "	3,36x "	5 x "	2,33x "		
7 x "	3,64x "	7 x "	2,67x "		
8 x "	3,87x "	1 $\times 10^{12}$	2,92x "		
9 x "	4,06x "	1,3x "	3,04x "		
1 $\times 10^{11}$	4,22x "	1,6x "	3,09x "		
1,3x "	4,55x "	2 x "	3,11x "		
1,6x "	4,74x "				
2 x "	4,88x "				
2,4x "	4,94x "				
3 x "	4,98x "				
3,4x "	4,99x "				
4 x "	5,00x "				

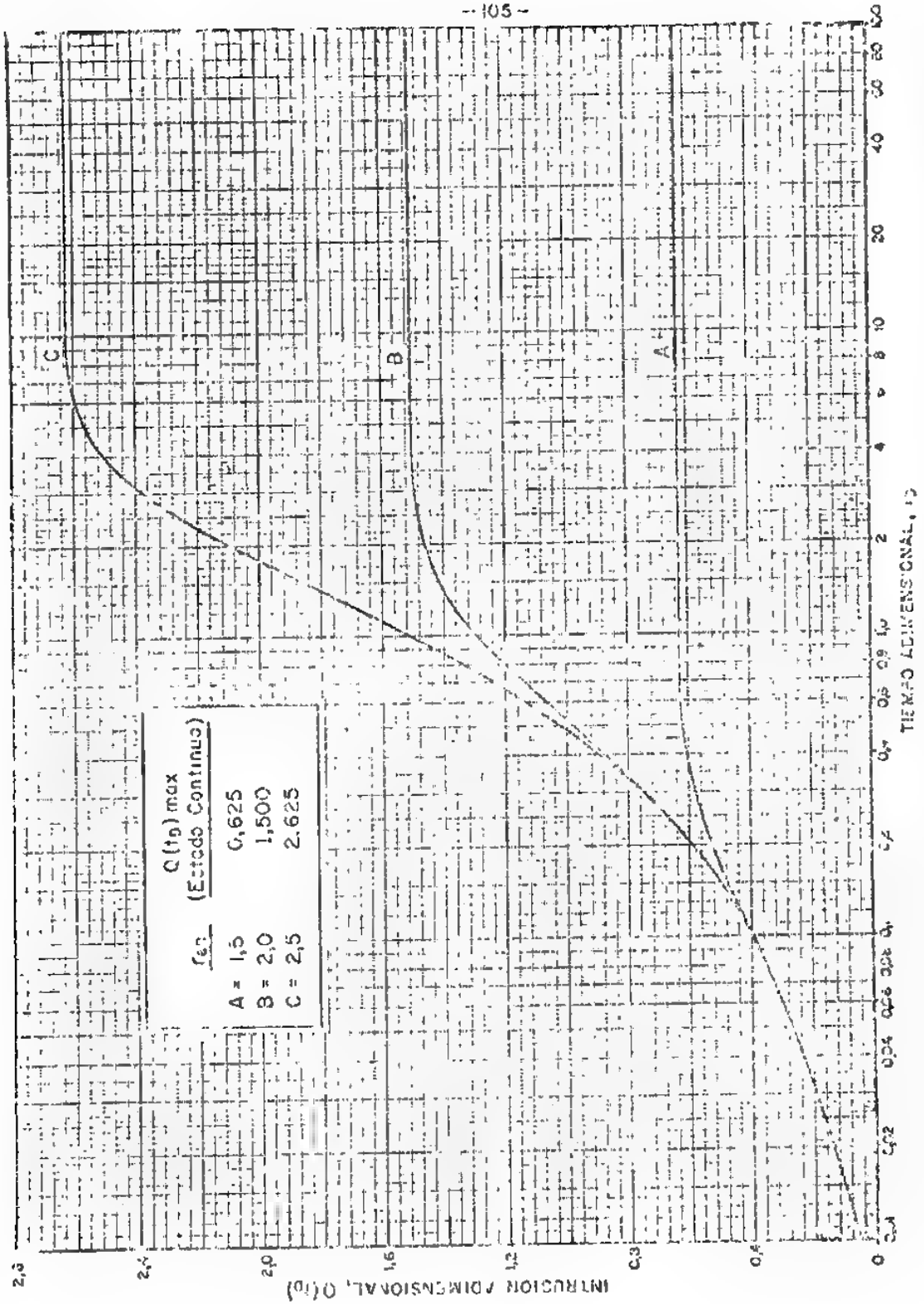


Fig 35-Intrusión adimensional,  $Q(t)$ , como función de tiempo adimensional,  $t$ , Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 1.5 ; 2.0 y 2.5. (Referencias 7 y 8).

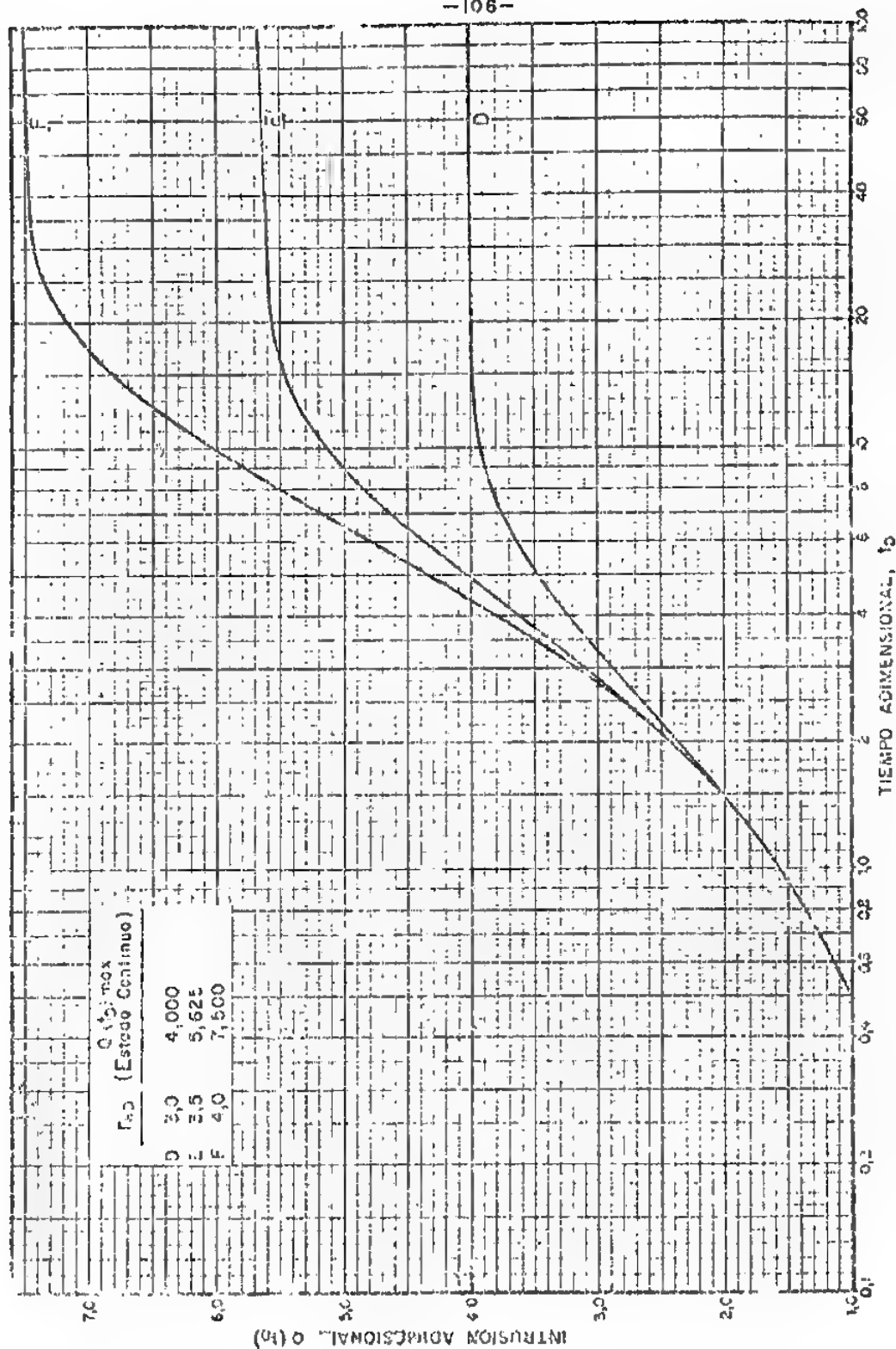


Fig. 36-Intrusión adimensional,  $Q(t_0)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 3.0 ; 3.5 y 4.0. (Referencias 7 y 8).



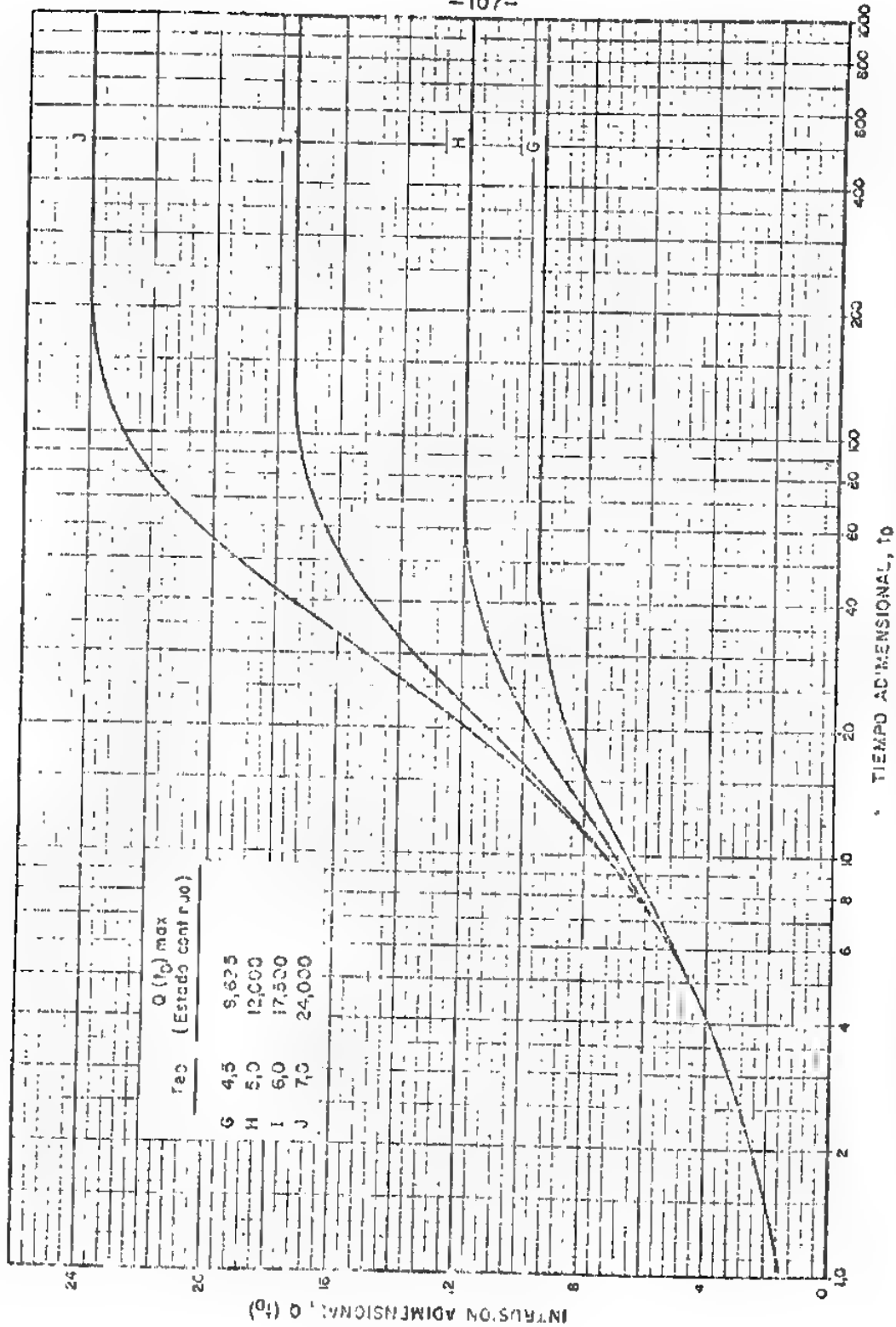


Fig. 37-Infiltración dimensional,  $Q(t_0)$ , como función de tiempo dimensional,  $t_0$ . Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y tasa de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio dimensional de 4,5; 5,0; 6,0 y 7,0. (Referencias 7 y 3).

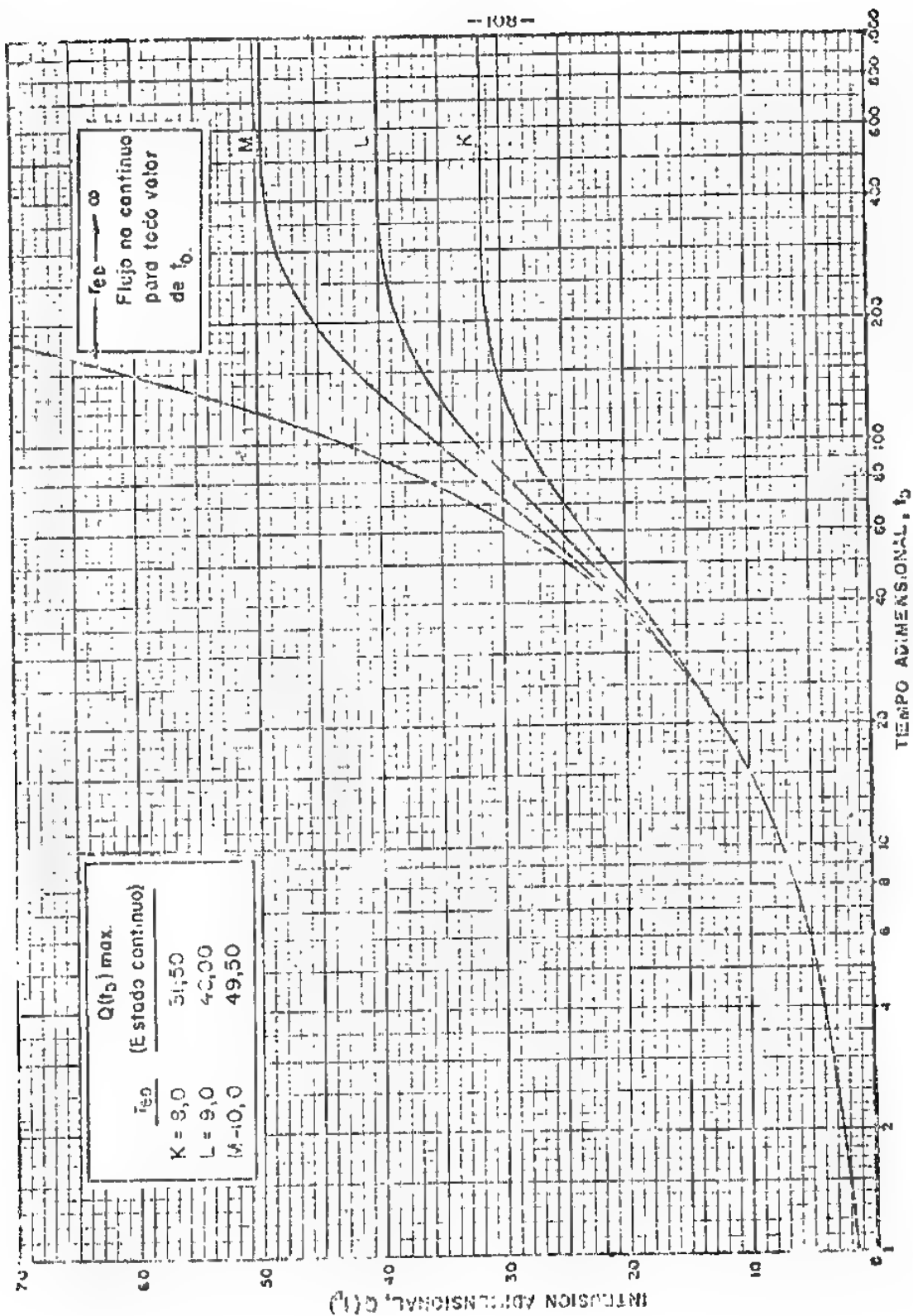


Fig. 53-Intrusión adimensional,  $Q(t)$ , como función de tiempo adimensional,  $t$ . Sistema radial limitado (fuente). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y ratio de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Ratio adimensional de 8,0; 9,0; 10,0;  $\infty$ . (Referencias 7 y 8).

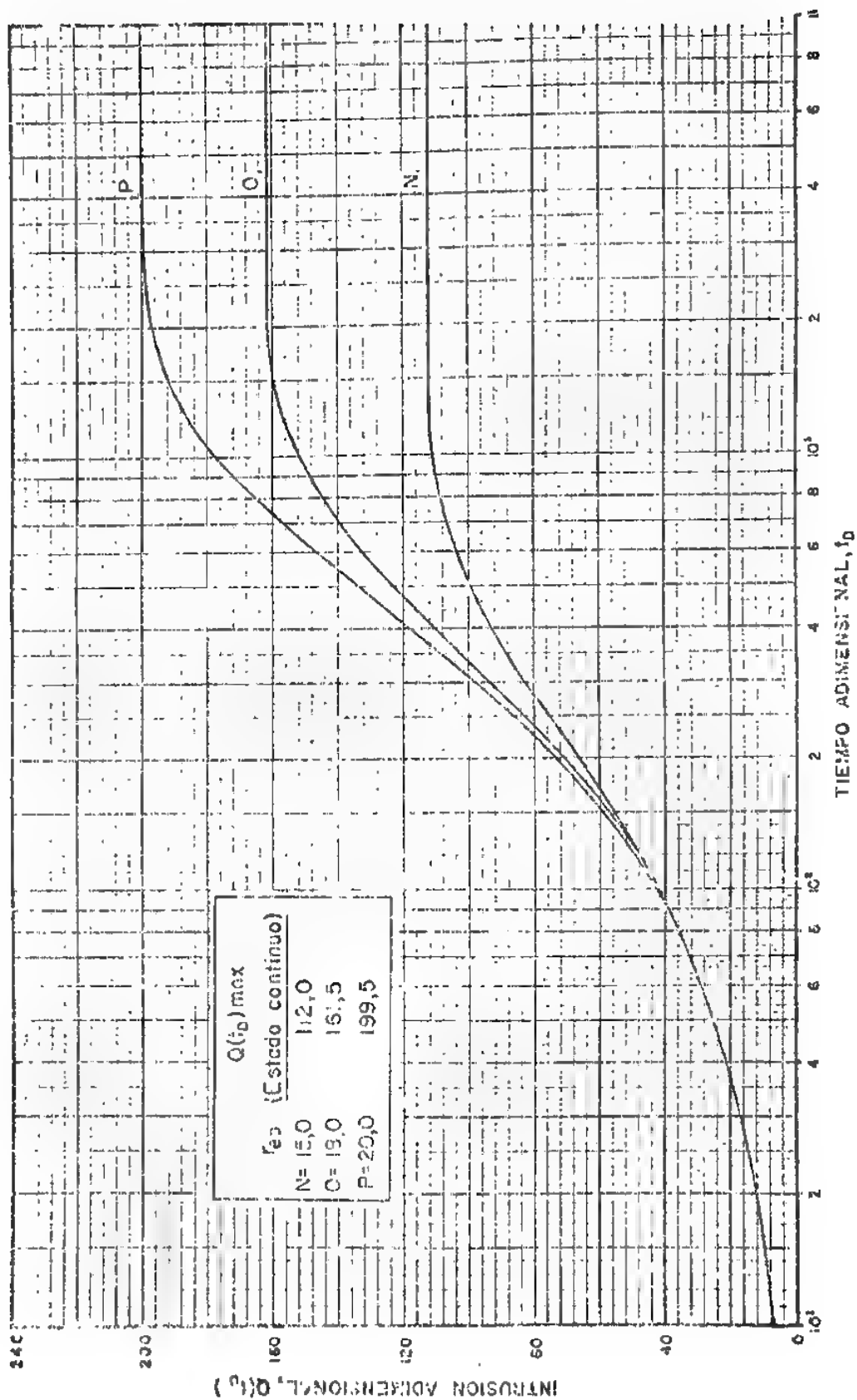


Fig. 39-Intrusión adimensional,  $Q(t_b)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_b$ . Sistema radial limitado (finiro). Presión en el límite interior (contrato agua - petróleo) constante y ratio de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 15,0; 18,0 y 20,0 (Referencia 31).

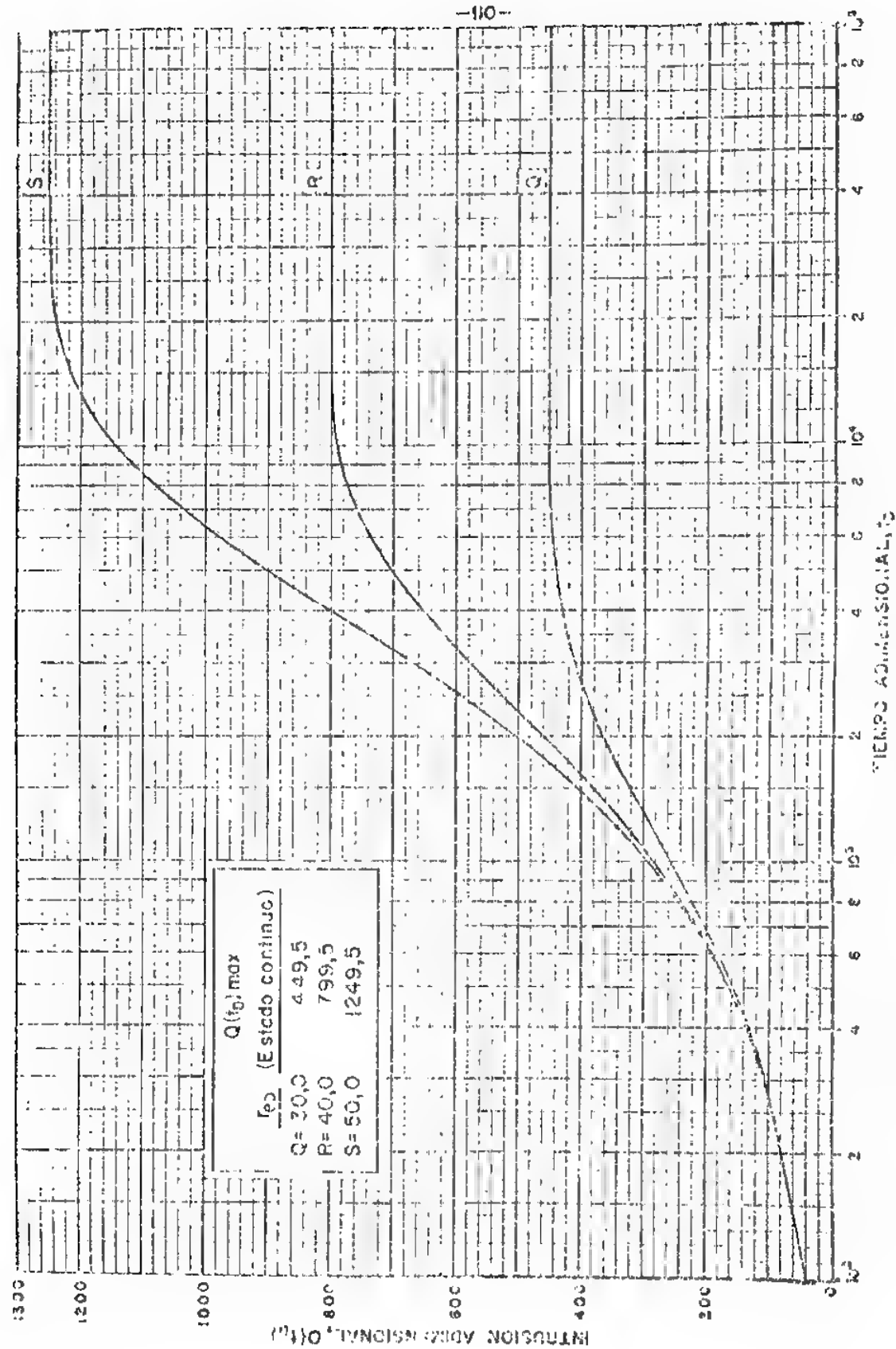


Fig. 40-Intrusión dimensional,  $Q(t)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-paredes) constante y ratio de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio dimensional es 50,0, 40,0 y 20,0 (curvas 31).

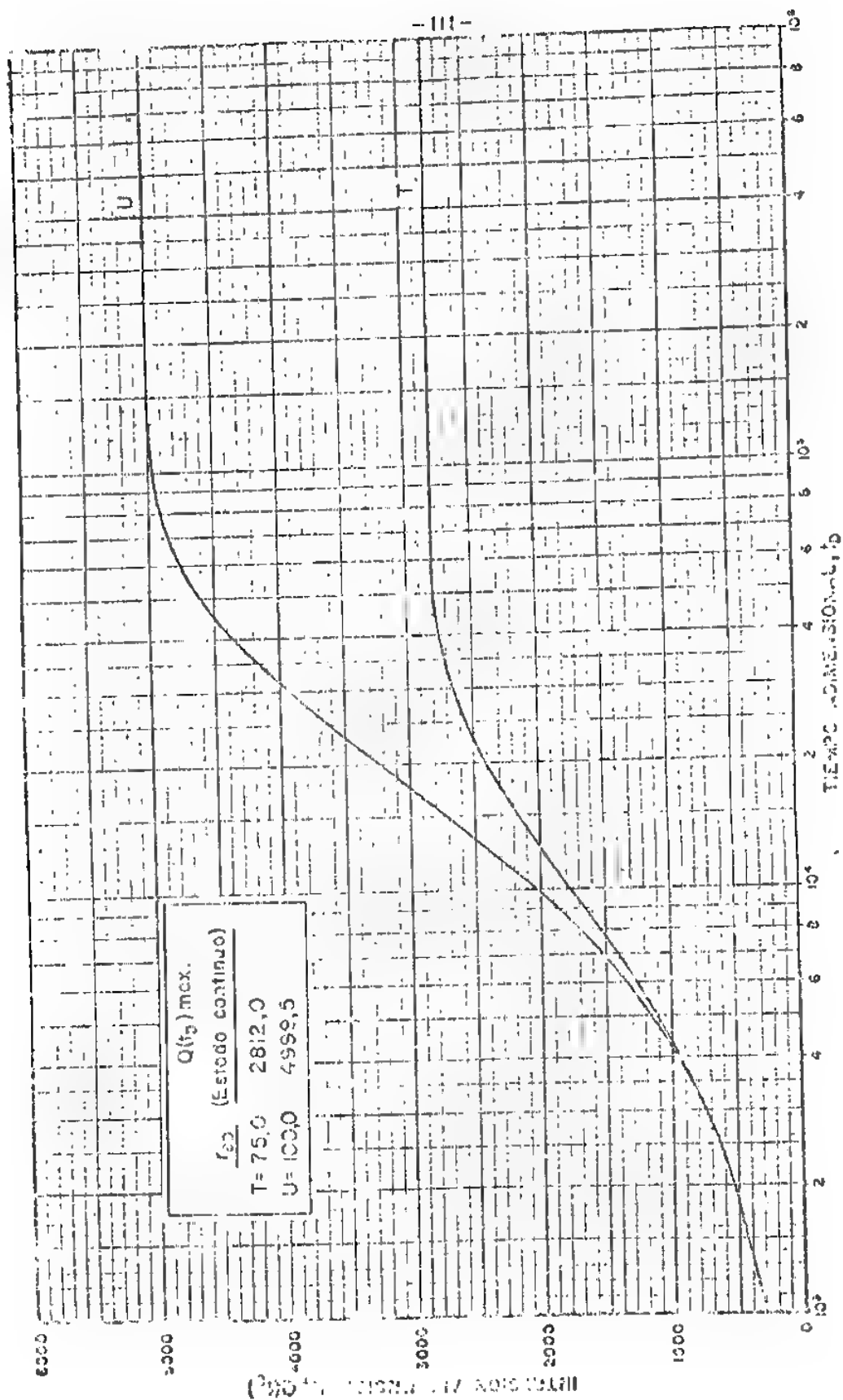


Fig. 41 Intrusión adimensional  $Q(t_0)$  como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y radio de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 75,0 y 100,0. (Referencia 51).

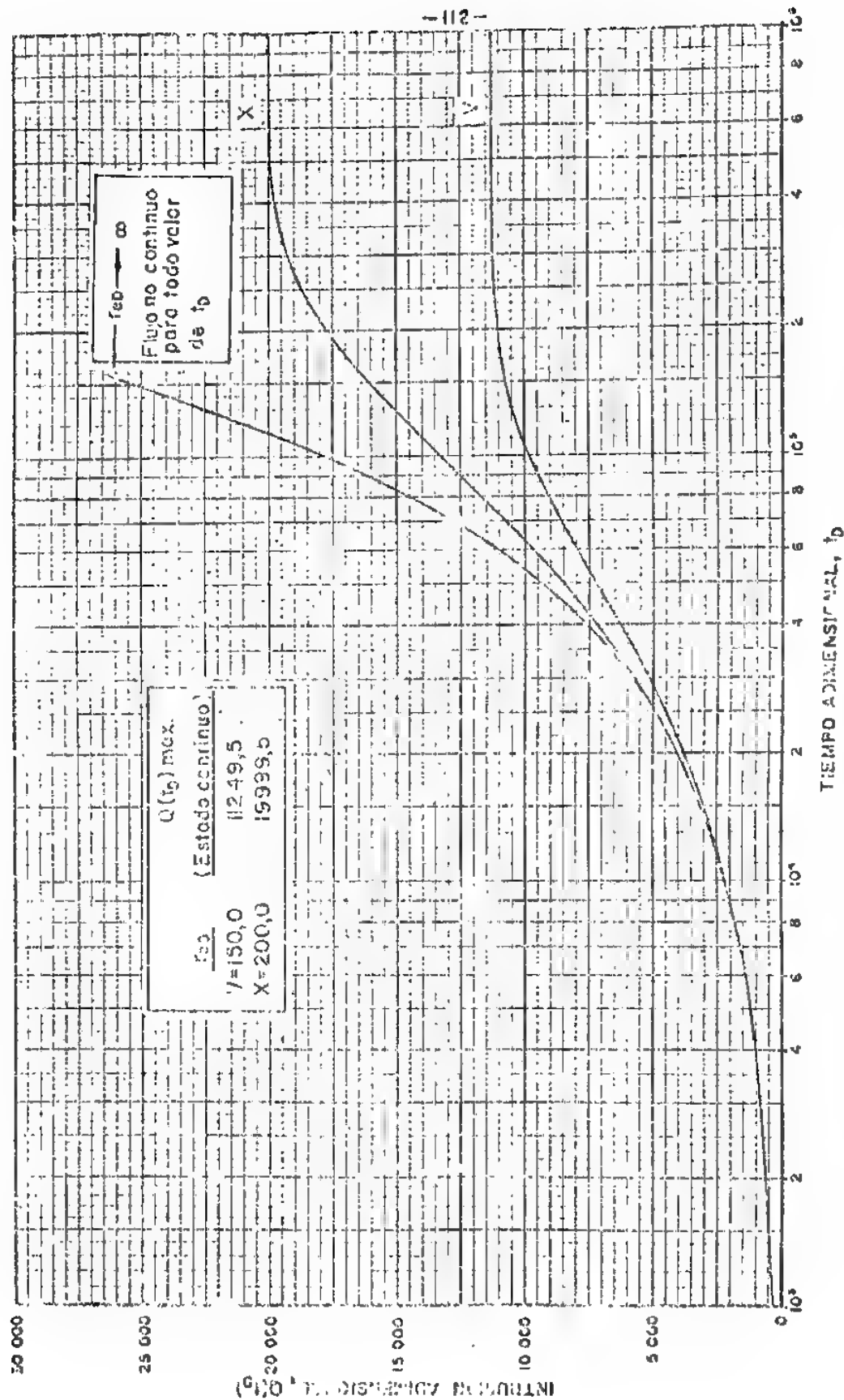


Fig. 42 - Intrusión adimensional,  $Q(t_0)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y ratio de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional de 150,0; 200,0;  $\infty$ . (Referencia 31).

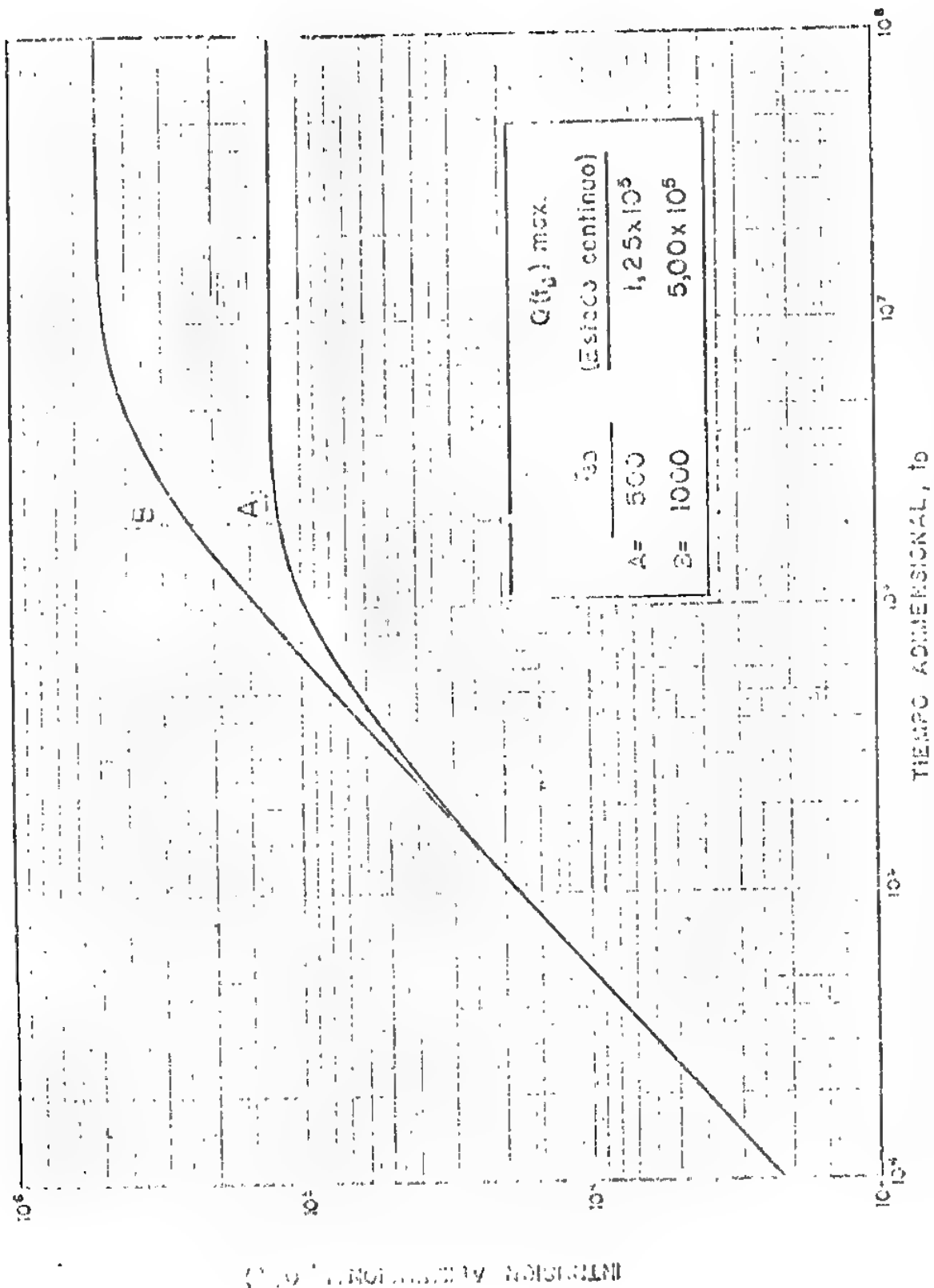


Fig. 43- intrusión adimensional,  $Q(t_0)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_0$ . Sistema radial limitado (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Rata adimensional, 500 y 1000 (Referencia 31).

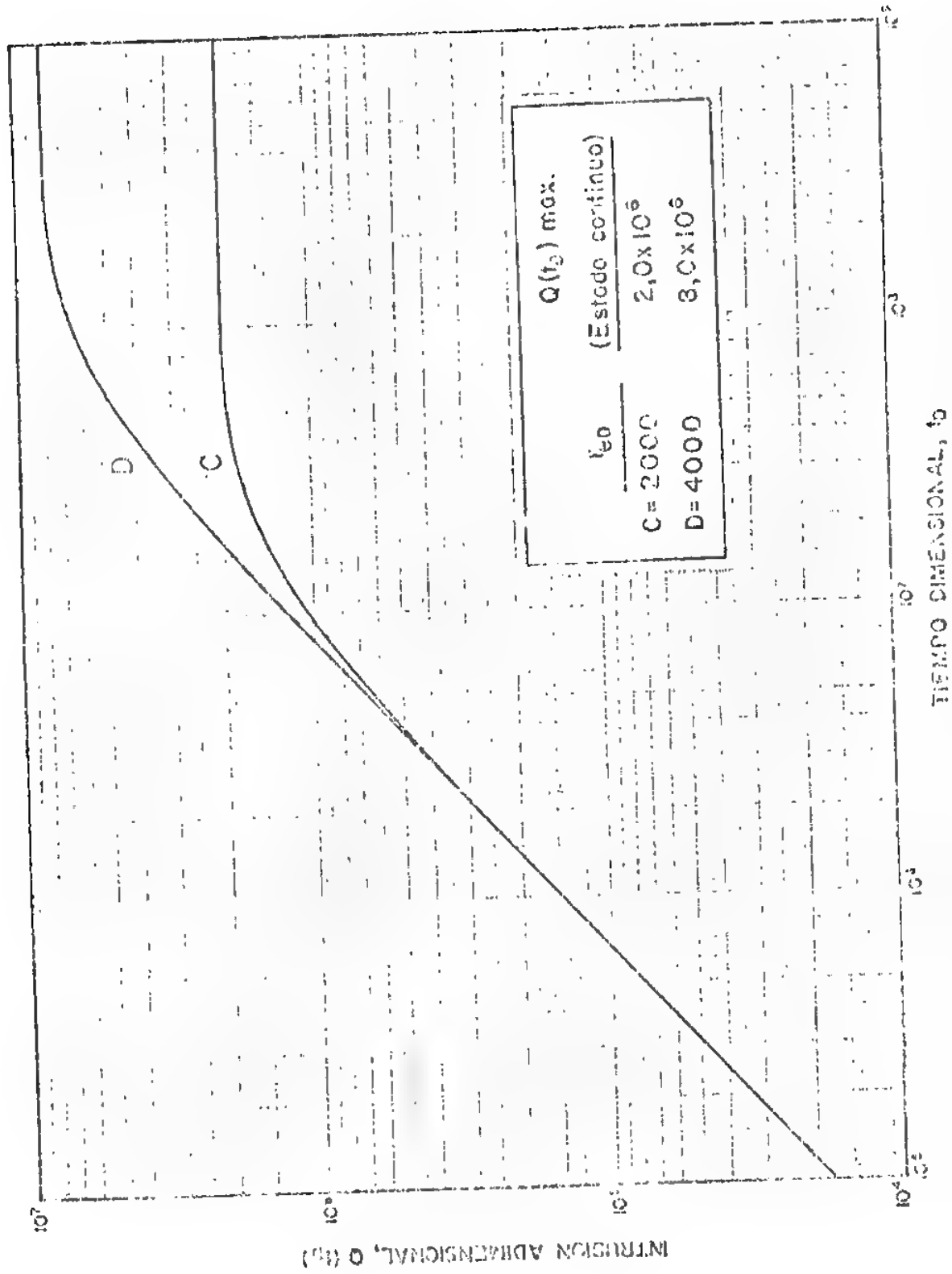


Fig. 44—Intrusión adimensional,  $Q(t_D)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema acuífero finito (finito). Presión en el límite interior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional, 2000 y 4000 (Referencia 31).



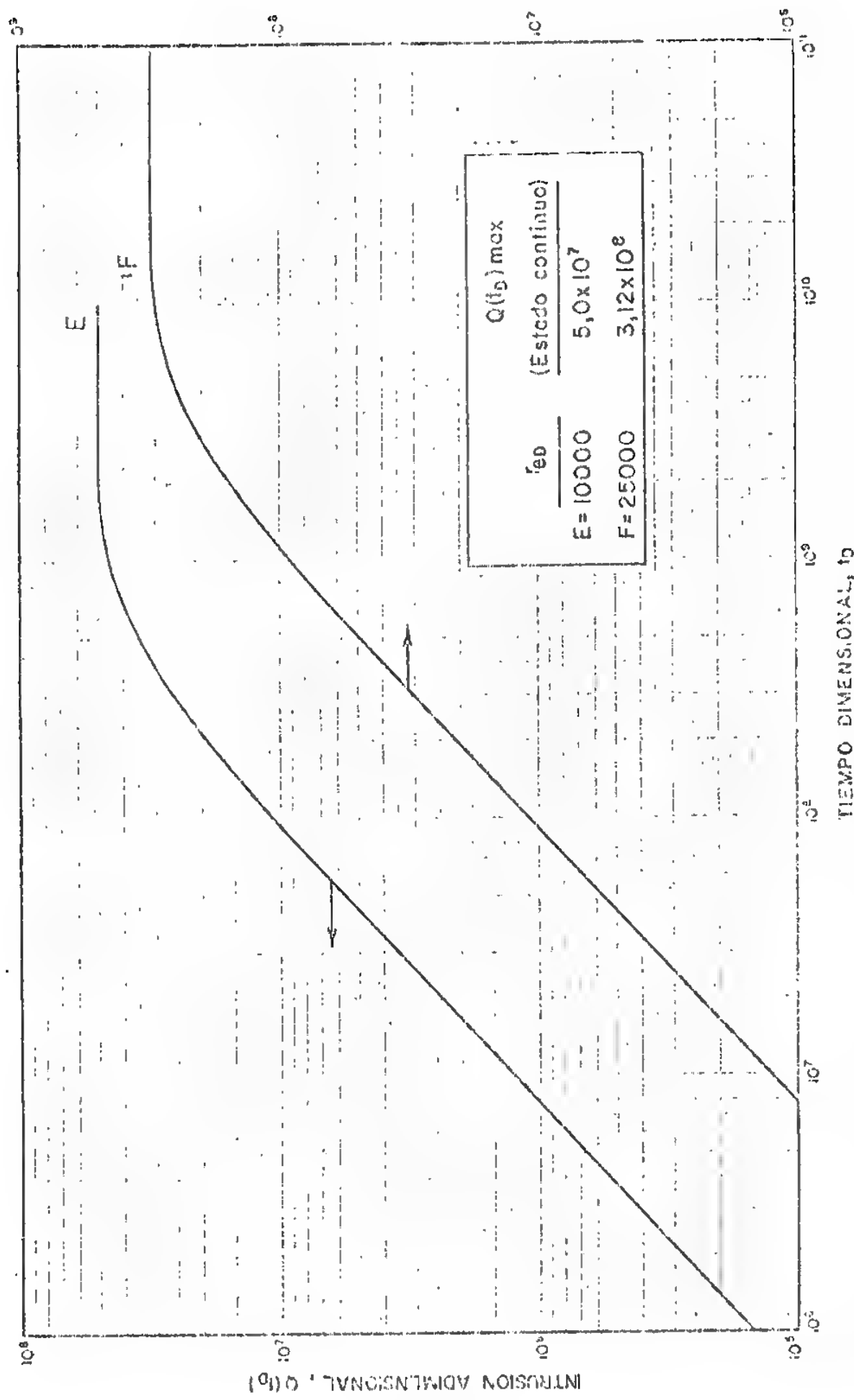


Fig. 45-Intrusión adimensional,  $Q(t_D)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_D$ . Sistema radial limitado (finilo). Presión en el límite interior (contacto agua-petroleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional, 10.000 y 25.000 (Referencia 31).

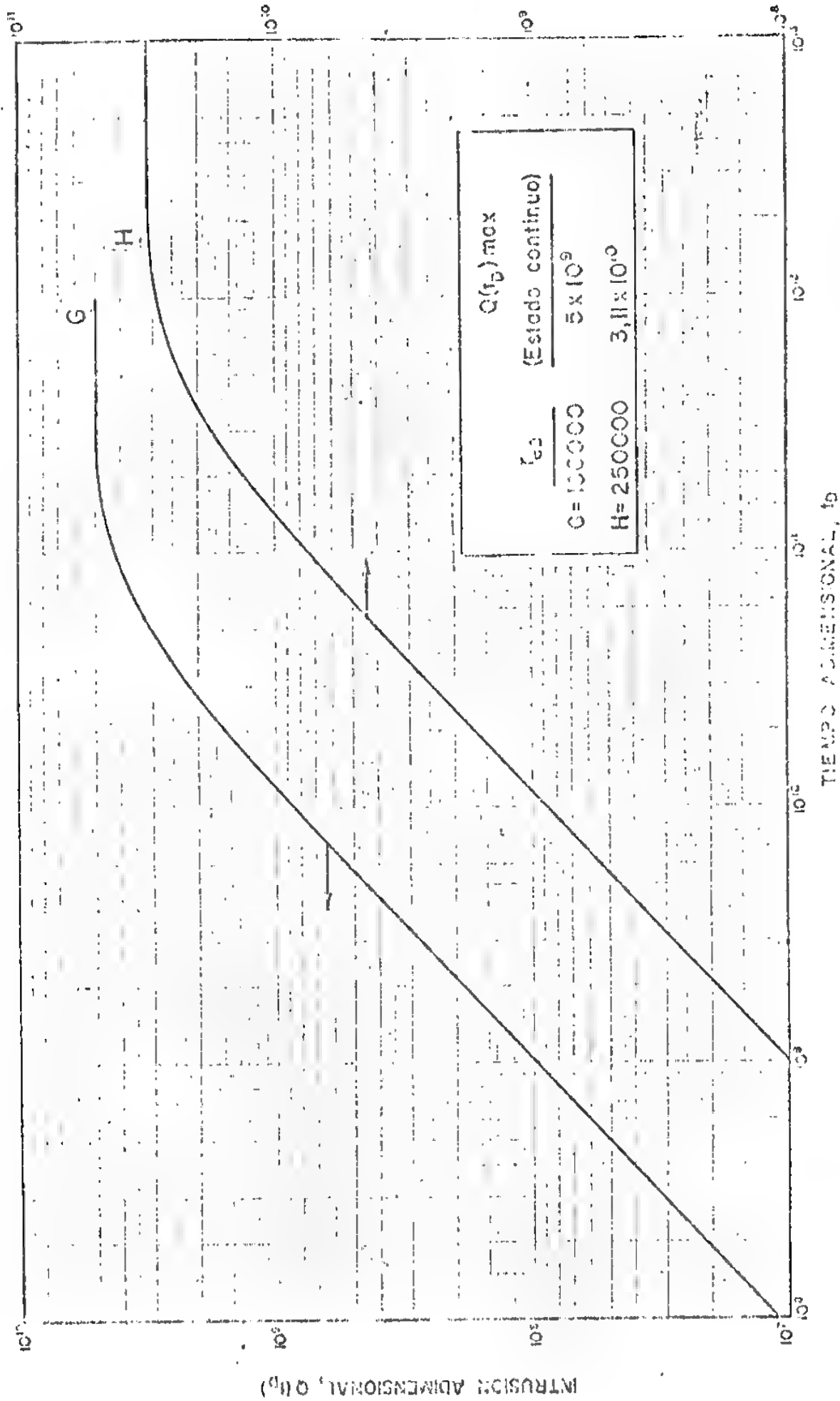


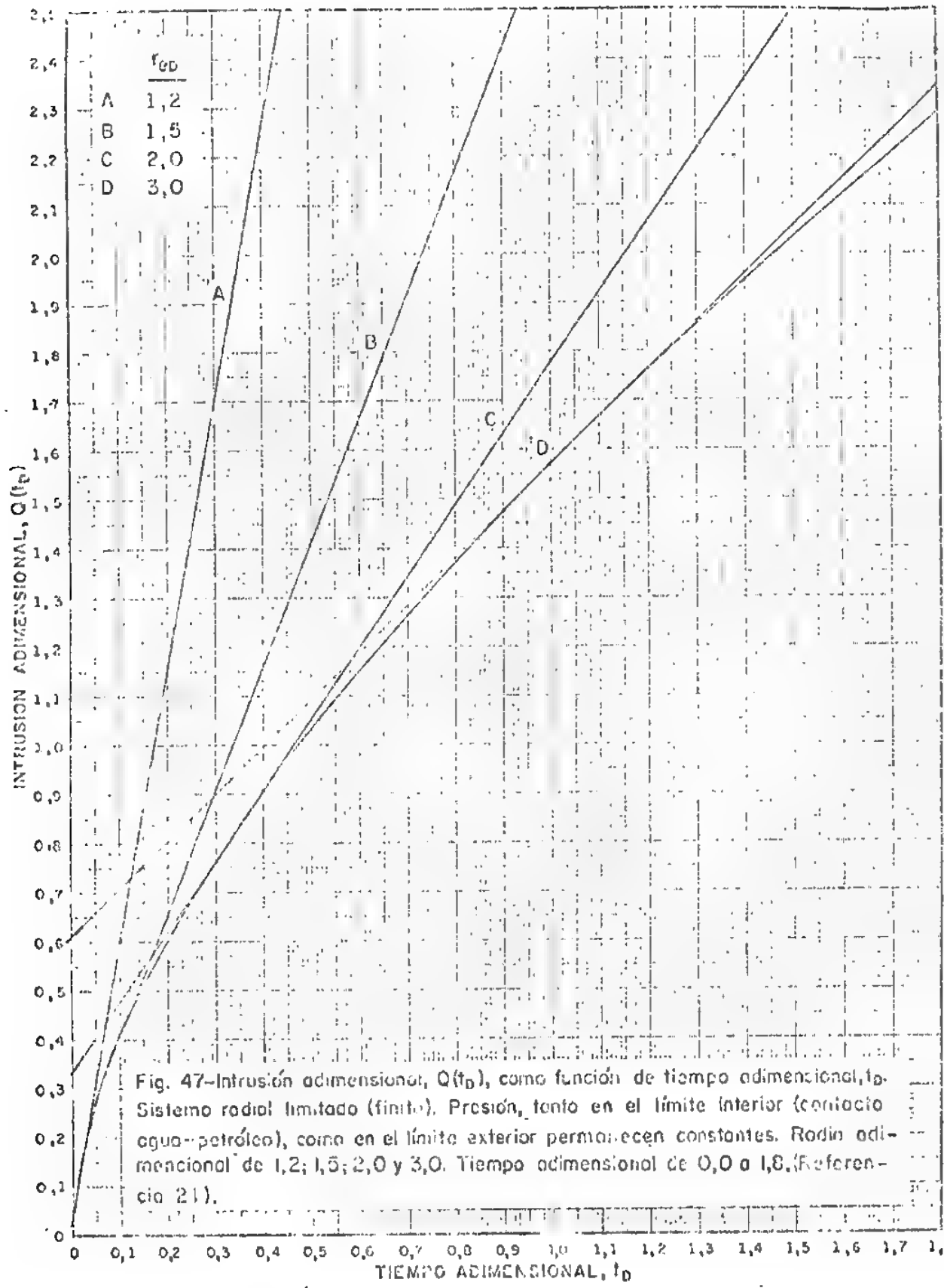
Fig. 46 -Intrusión adimensional,  $Q(t_b)$ , como función de tiempo adimensional,  $t_b$ . Sistema radial limitado (límite). Presión en el límite inferior (contacto agua-petróleo) constante y rata de flujo igual a cero en el límite exterior (límite exterior cerrado). Radio adimensional, 100.000 y 250.000 (Referencia 31).

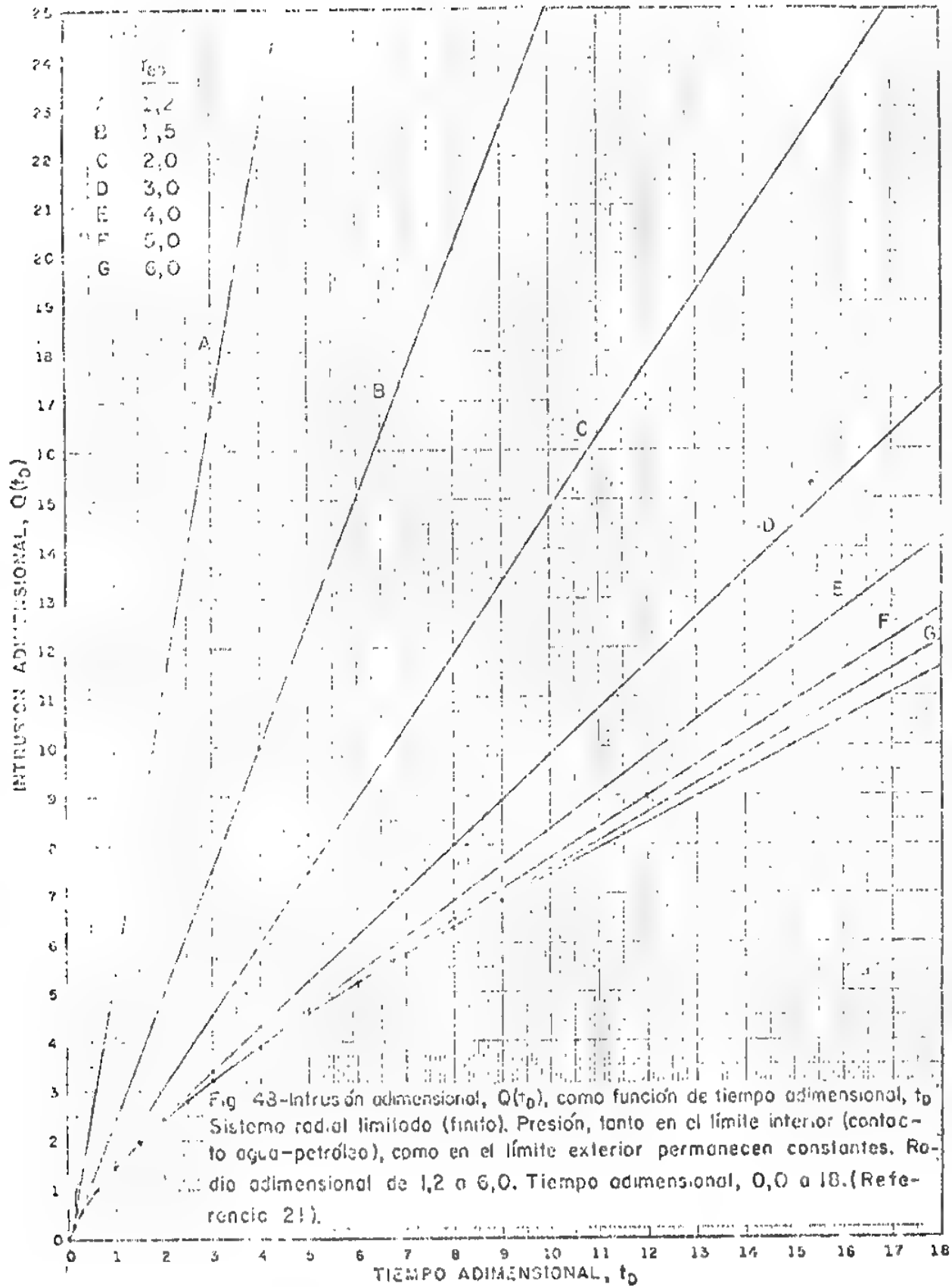
res y utilizando métodos numéricos para resolver la ecuación de difusividad. Los valores de  $Q(t_D)$  para  $r_{eD}$  entre 1,2 y 100 se presentan en las Figs.47, 48 y 49.

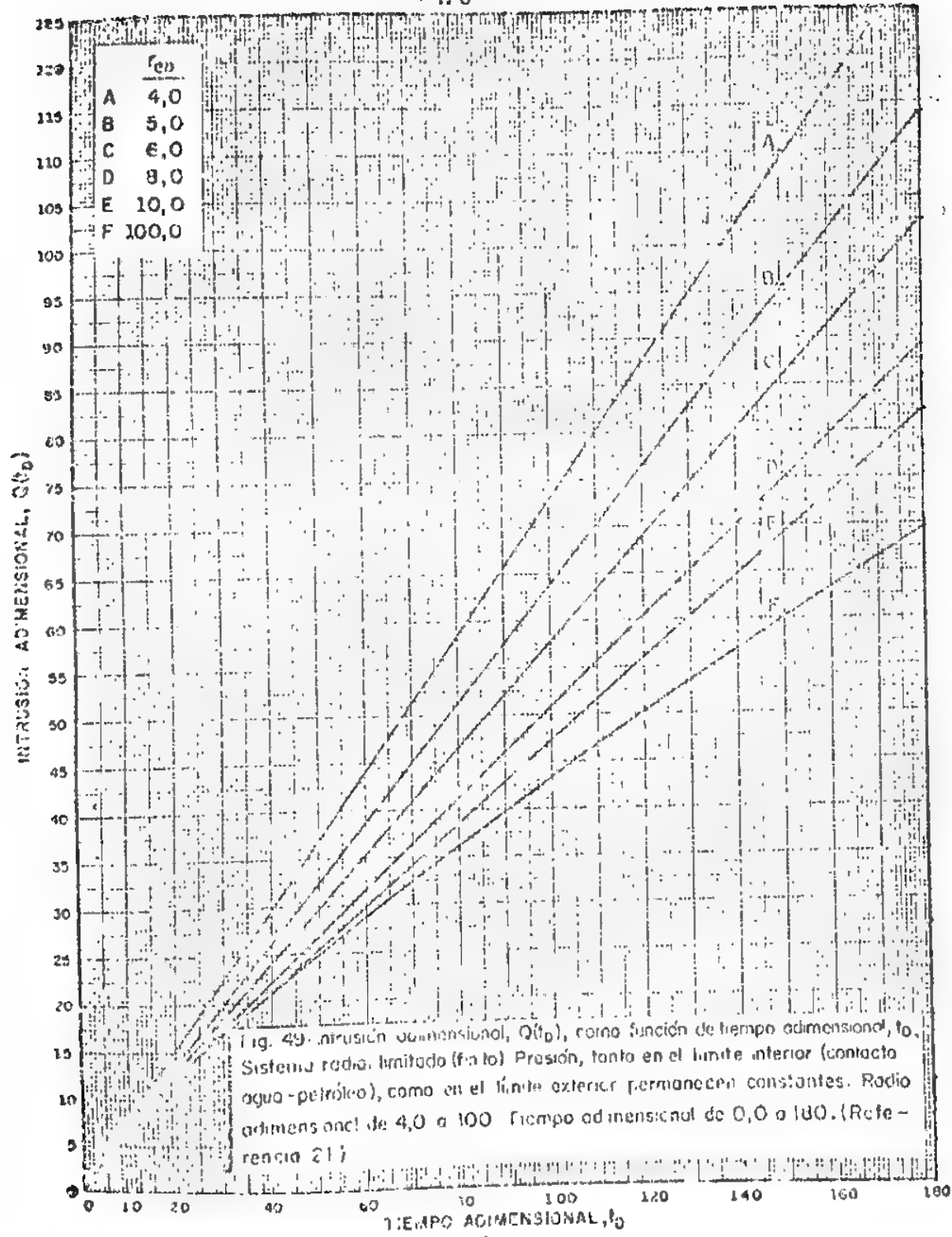
#### Acuíferos Radiales No-Homogéneos.

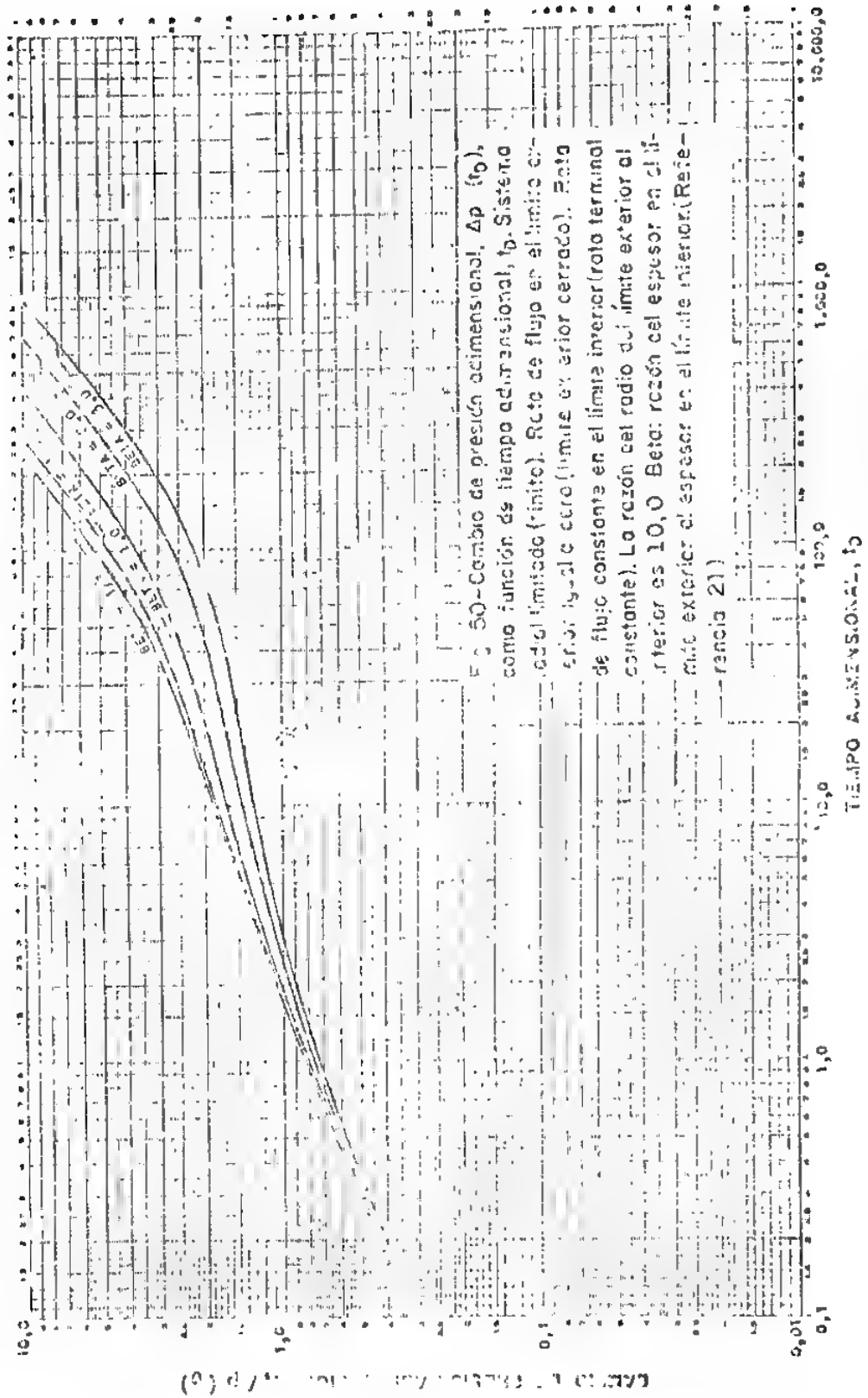
En forma similar que para Acuíferos Lineales, Mueller<sup>21</sup> presenta soluciones para los Casos 3 y 5 de acuíferos radiales, donde igualmente varían linealmente las propiedades espesor,  $h$ , permeabilidad/viscosidad,  $k/\mu$  y (porosidad) $\times$ (compresibilidad),  $\phi\mu$ , entre el límite interior y el límite exterior. Define igualmente el factor  $\beta$  como la propiedad variante en el límite exterior dividida por la misma propiedad variante en el límite interior. Como puede observarse de las soluciones de los Casos 3 y 5, habría un número ilimitado de soluciones, ya que para cada valor de  $r_{eD}$  existe una solución específica. Mueller consideró los Casos 3 y 5 sólo para  $r_{eD}=10,0$ . Este valor es típico del tamaño de muchos acuíferos en el mundo. La Fig.50 presenta los resultados,  $\Delta p(t_D)$  como función de  $t_D$ , correspondiente al Caso 3 y variación del espesor, según el valor de  $\beta$  entre  $1/3$  y  $30$ . La Fig.51 presenta los resultados,  $Q(t_D)$  como función de  $t_D$ , correspondiente al Caso 5 y para variación del espesor, de acuerdo al valor de  $\beta$  entre  $1/3$  y  $30$ . Las Figs.52 y 53 presentan soluciones similares, también para el Caso 5, donde varía el factor permeabilidad/viscosidad y el factor (porosidad) $\times$ (compresibilidad) respectivamente para valores de  $\beta$  entre  $0,1$  y  $1000$  y  $0,1$  y  $10$ .

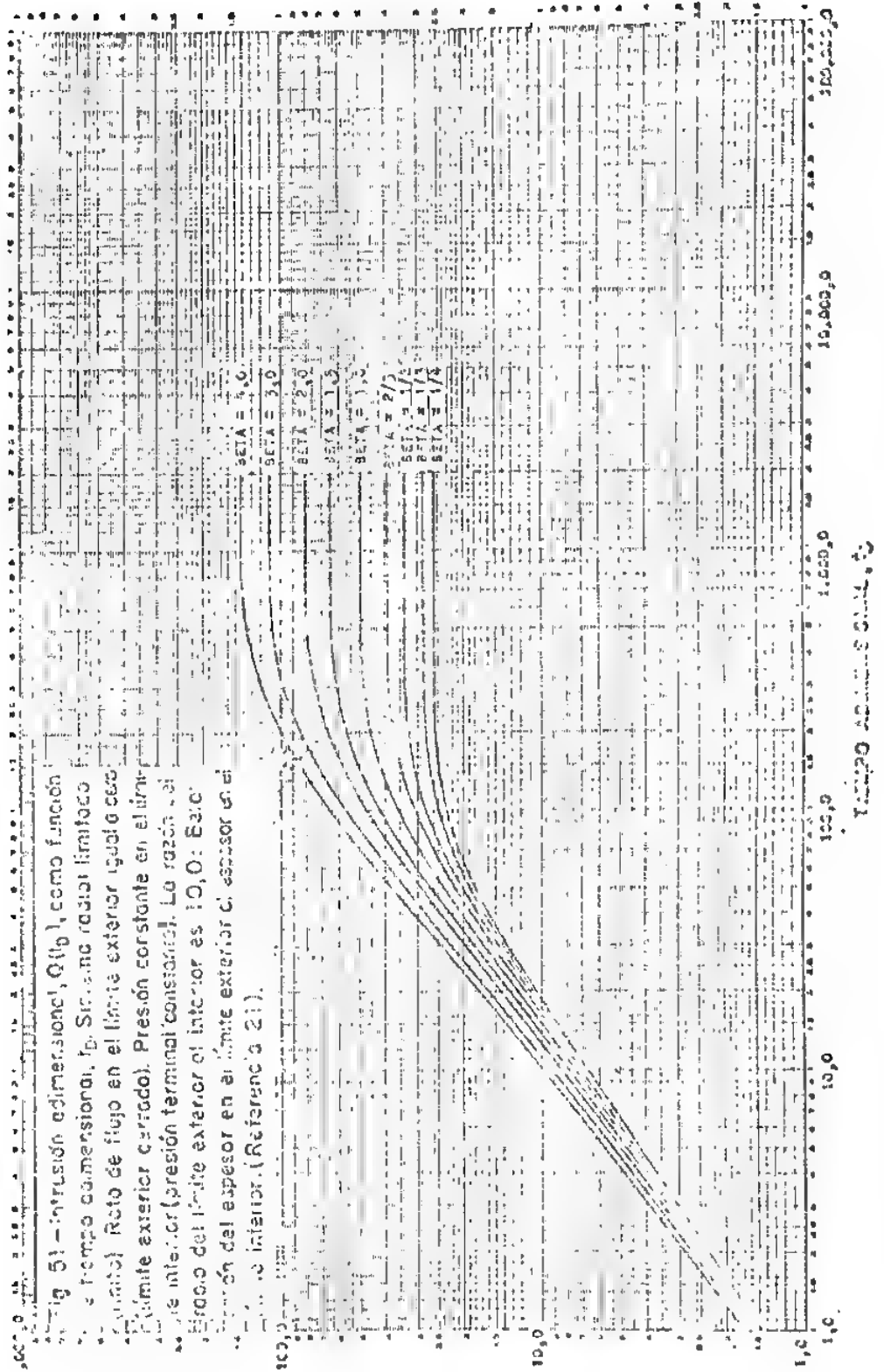
Lo que se discutió respecto a los factores  $k/\mu$  y  $\phi\mu$  para el caso de acuíferos lineales, se cumple también para acuíferos radiales. Nótese la similitud entre las Figs.14 y 52. Su comportamiento es análogo por las razones discutidas al tratar la Fig.14.







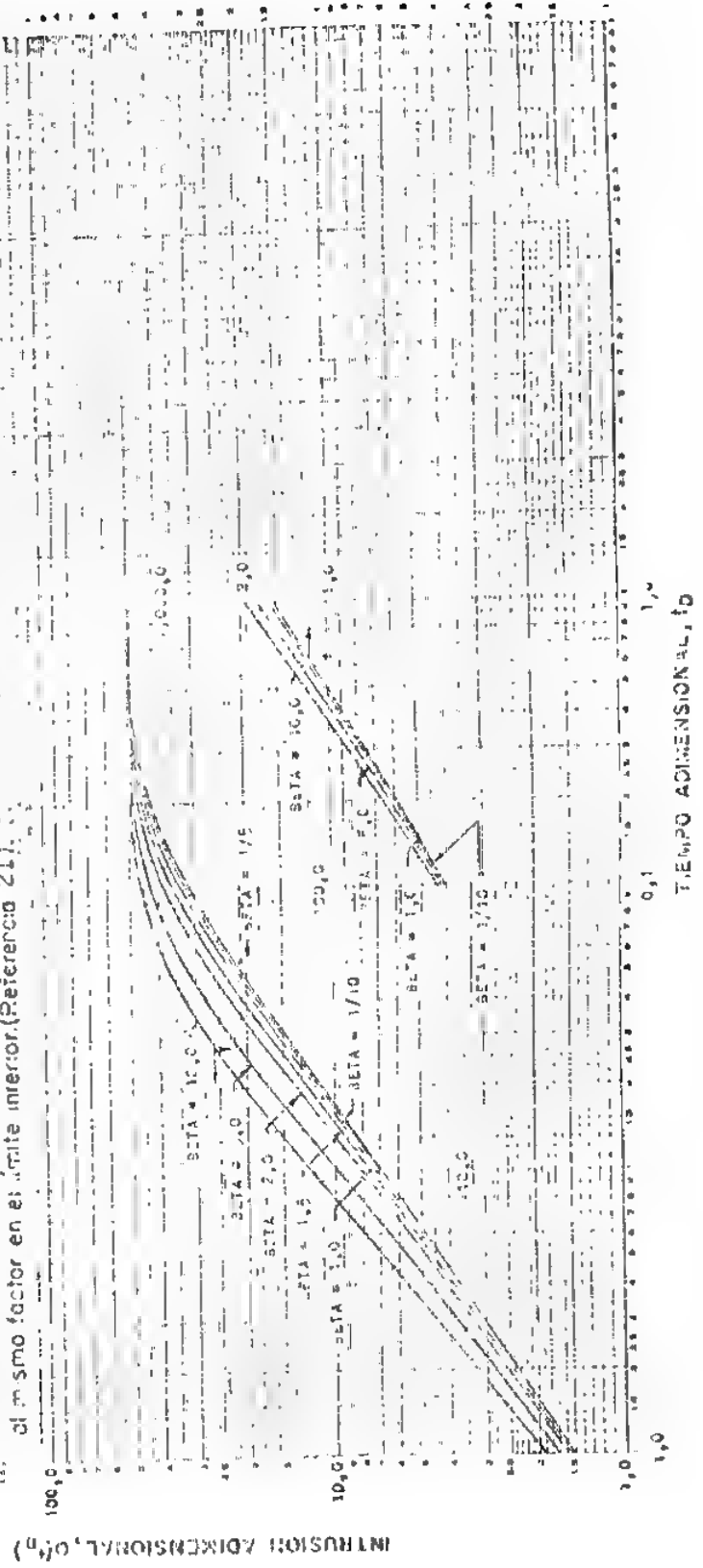


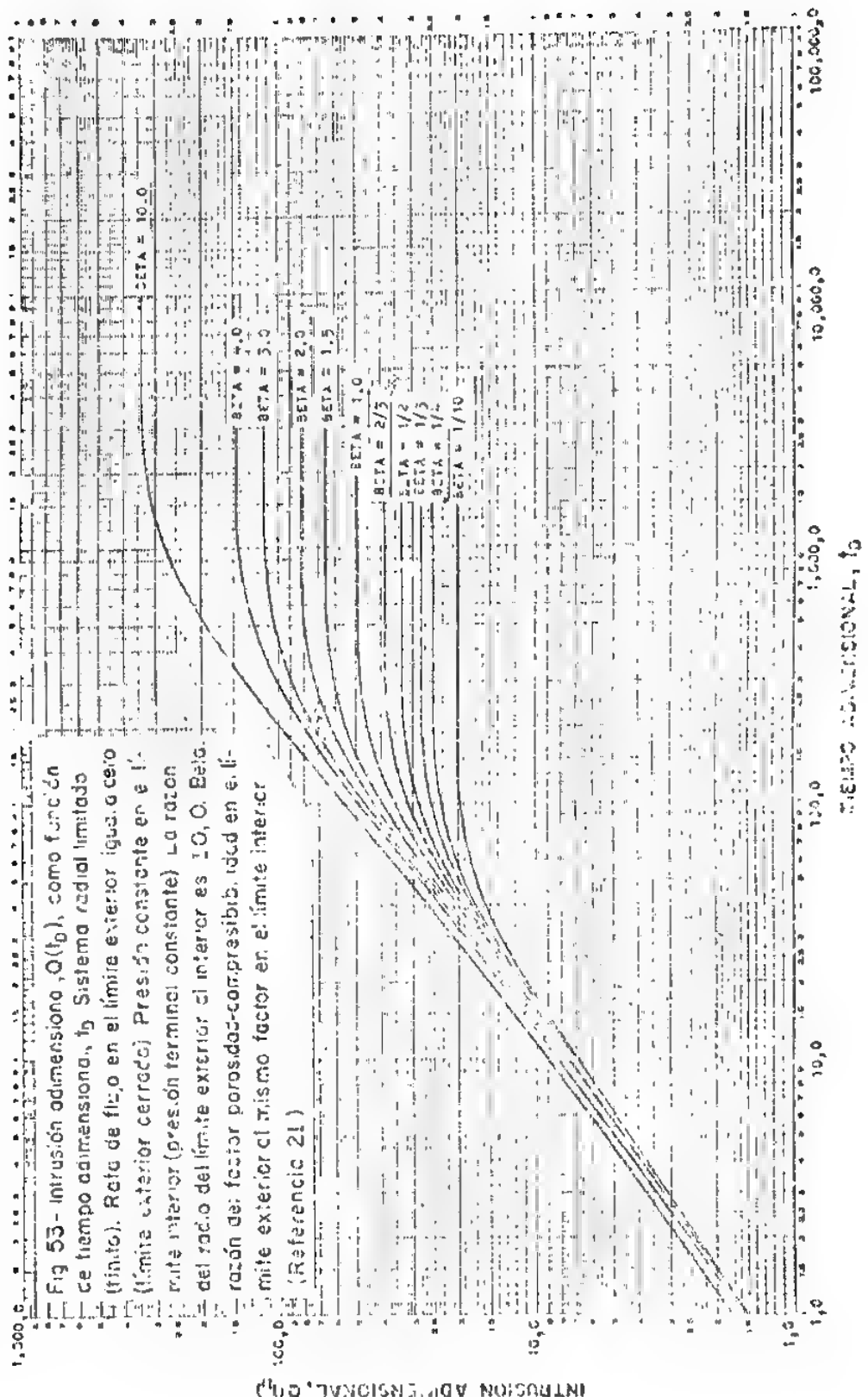


INTRUSION AD. ESTAD. Q(t)



Fig 52 - Intrusión adimensional,  $Q(t)$ , como función de tiempo adimensional,  $t$ , Sistema radial limitado (límite) Rata de flujo en el límite exterior igual a cero (límite exterior cerrado) Presión constante en el límite exterior (presión terminal constante) La razón del radio del límite exterior al interior es 10, 0. Beta: razón del factor permeabilidad / viscosidad en el límite exterior al mismo factor en el límite interior (Referencia 21).





### PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

En las secciones anteriores se discutieron las diferentes soluciones más comunes para sistemas lineales y radiales, donde la rata de intrusión (o producción) o la presión en el límite interior, permanecen constantes con tiempo, es decir, los términos  $e$  (o  $q$ ) y  $p$  (o  $\Delta p = p_i - p$ ) son constantes con tiempo, o sea los casos de rata terminal o presión terminal constante. Sin embargo, esto en muy raras ocasiones ocurre en la práctica, pues es bien conocido que tanto  $e$  (o  $q$ ) como  $p$  (o  $\Delta p = p_i - p$ ), cambian a medida que la intrusión o producción de un yacimiento avanza. Con el fin de aplicar las ecuaciones a estas situaciones se ha hecho uso del principio matemático denominado Teorema de Superposición o simplemente Principio de Superposición. Matemáticamente el principio o teorema de superposición establece que la combinación lineal de soluciones particulares de una ecuación diferencial homogénea lineal es también una solución de la ecuación diferencial. Este principio es muy útil en sistemas donde se imponen condiciones de límite (corteno). La solución general es la suma de las soluciones particulares obtenidas tratando una de las condiciones de límite a determinado tiempo.

El principio de superposición permite la obtención de la historia de presión, dada una historia determinada de rata de intrusión (o producción), o viceversa, puede obtenerse de la rata de intrusión (o producción), dada la historia de presión. Además si se conoce la historia de presión, puede calcularse la intrusión total de agua al yacimiento (o la producción total de petróleo del yacimiento) durante un periodo dado. Esta última aplicación del principio de superposición es más común cuando se trata de problemas de intrusión de agua a un yacimiento. El pri

mer caso, o sea cálculo de presiones, dada la historia de rata de producción, es más común en problemas relacionados con pruebas de pozos<sup>18</sup>, o en problemas de acuíferos cuando se conoce la rata de intrusión. Por ejemplo, en yacimientos con un empuje hidráulico activo que producen por encima del punto de burbujeo, la rata de producción de petróleo puede asumirse aproximadamente igual a la rata de intrusión de agua. La rata de intrusión también puede obtenerse de datos de presión-producción de petróleo y haciendo un balance volumétrico de los fluidos en el yacimiento.

Cuando se conoce tanto la historia de presión como la historia de la rata de intrusión puede determinarse la denominada función de Influencia<sup>33,34</sup> definida como el cambio en presión del yacimiento por rata de intrusión unitaria.

La Fig.54 ayuda a deducir fórmulas del principio de superposición para el primer caso. Se conoce la historia de la rata de intrusión (o producción),  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  que comienzan a actuar respectivamente a los tiempos,  $0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ . En la práctica, la historia de la rata de intrusión (o producción) se presenta en forma continua (línea continua), sin embargo, con el fin de poder aplicar las ecuaciones vistas anteriormente (rata terminal constante), se aproxima en forma escalonada, tal como indica la Fig 54. Además se conoce la presión inicial (original) del yacimiento.

Supóngase que se desea determinar la caída total de presión (y por consiguiente la presión) a un tiempo,  $t_n$ , comprendido entre  $t_1$  y 0. Ya que en este intervalo, la rata de intrusión (o producción) es constante,  $q_1$ , se aplicarán directamente las Ecs.(26a), (28a) y (29a), para

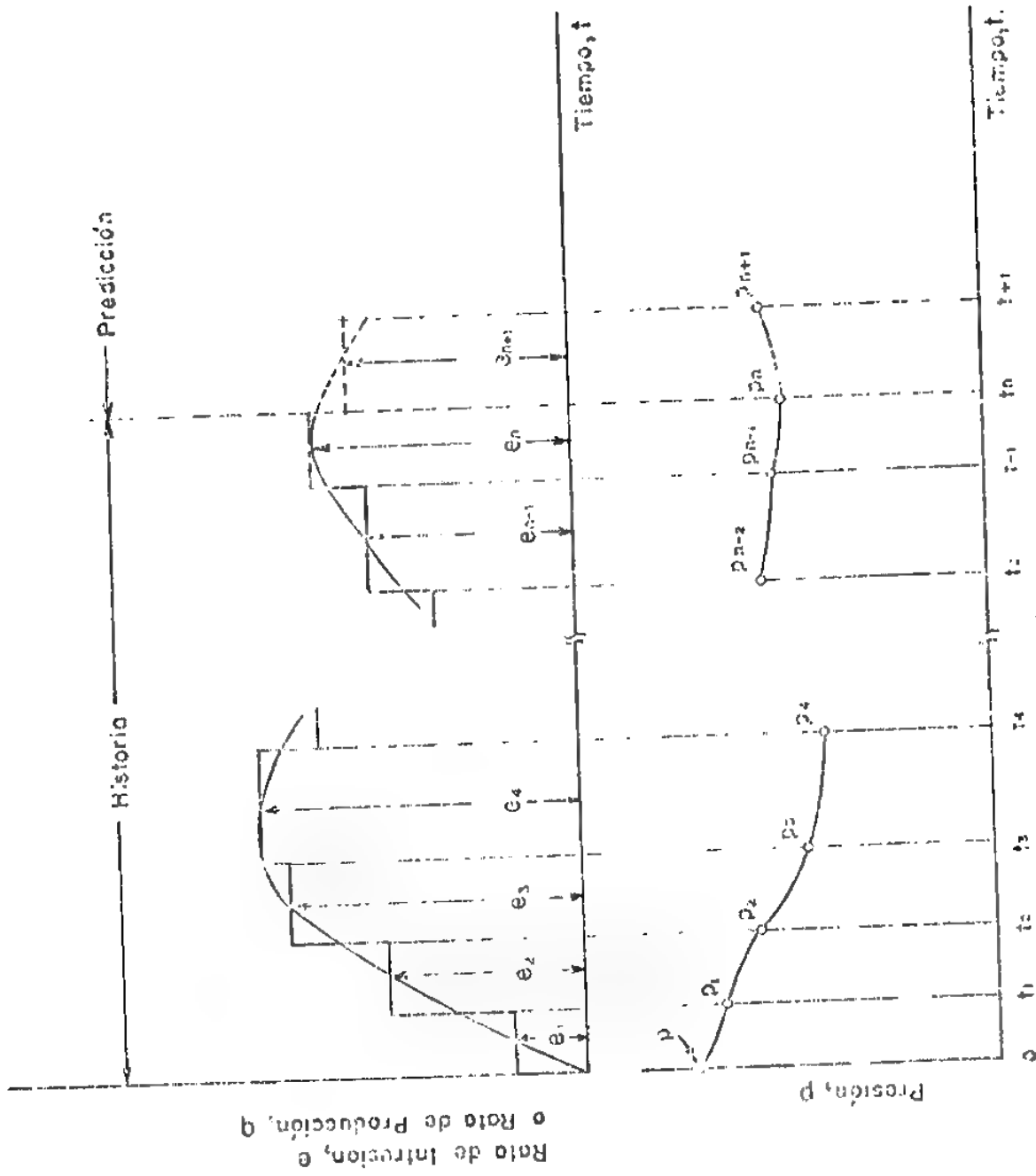


Fig. 54.— Historia de la rate de intrusión (o rate de producción) y de presión de un pozo (o yacimiento).

el caso de acuíferos lineales, y las Ecs.(37), (59) y (63) para el caso de acuíferos radiales:

Para  $0 \leq t \leq t_1$ :

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 e_1 \mu L}{kbh} F_k[(t)_D] \quad (73)$$

Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 e_1 \mu}{kh} \Delta p[(t)_D] \quad (37) (59) (63)$$

Al tiempo,  $t_1$ , la rata de intrusión (o producción) aumenta por una cantidad  $(e_2 - e_1)$ . Este aumento en la rata de intrusión lógicamente causa una caída adicional de presión y la caída total de presión (y por consiguiente la presión) se calculará, para un tiempo  $t$ , comprendido entre  $t_2$  y  $t_1$ , por la superposición de dos efectos:  $e_1$  que actúa por el tiempo  $(t - 0)$ , más  $(e_2 - e_1)$  que actúa por el tiempo  $(t - t_1)$ . En base a las ecuaciones anteriores, puede escribirse la caída total de presión:

Para  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 e_1 \mu L}{kbh} F_k[(t)_D] + \frac{887,58 (e_2 - e_1) \mu L}{kbh} F_k[(t - t_1)_D]$$

Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 e_1 \mu}{kh} \Delta p[(t)_D] + \frac{141,2 (e_2 - e_1) \mu}{kh} \Delta p[(t - t_1)_D]$$

Si al tiempo  $t_2$ , la rata de intrusión (o producción) cambia en una cantidad  $(e_3-e_2)$ , éste nuevo efecto causará otra caída extra de presión, y la caída total de presión (y por consiguiente la presión), para un tiempo,  $t$ , comprendido entre  $t_3$  y  $t_2$ , será la suma de tres efectos:  $e_1$  que actúa por un tiempo  $(t-0)$ , más  $(e_2-e_1)$  que actúa por el tiempo  $(t-t_1)$ , más  $(e_3-e_2)$  que actúa por el tiempo  $(t-t_2)$ . En base a las Ecs. (73) y (37) puede escribirse:

Para  $t_2 \leq t \leq t_3$ :

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 e_1 \mu L}{k b h} F_k[(t)_D] + \frac{887,58 (e_2 - e_1) \mu L}{k b h} F_k[(t - t_1)_D] + \frac{887,58 (e_3 - e_2) \mu L}{k b h} F_k[(t - t_2)_D] \quad (76)$$

Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 e_1 \mu}{k h} \Delta p[(t)_D] + \frac{141,2 (e_2 - e_1) \mu}{k h} \Delta p[(t - t_1)_D] + \frac{141,2 (e_3 - e_2) \mu}{k h} \Delta p[(t - t_2)_D] \quad (77)$$

Si al tiempo  $t_3$ , la rata de intrusión (o producción) cambia en una cantidad  $(e_4-e_3)$ , para calcular la caída total de presión a un tiempo,  $t$ , mayor de  $t_3$ , basta agregar este efecto a los anteriores, y escribir ecuaciones similares a las Ecs. (76) y (77), agregando otro término debido a  $(e_4-e_3)$ . Así podría continuarse, para una secuencia de  $e_n$  ratas de intrusión tal como indica la Fig. 54, y la caída total de pres-

sión a un tiempo  $t_n$  puede escribirse,

Para  $t_n \geq t_{n-1}$ :

Acuíferos Lineales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 \mu L}{kbh} \left[ e_1 F_k[(t_n)_D] + (e_2 - e_1) F_k[(t_n - t_1)_D] + \right. \\ \left. + (e_3 - e_2) F_k[(t_n - t_2)_D] + \dots + (e_n - e_{n-1}) F_k[(t_n - t_{n-1})_D] \right] \quad (7)$$

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 e_1 \mu L}{kbh} \left[ F_k[(t_n)_D] + \sum_{j=2}^n \frac{(e_j - e_{n-1})}{e_1} F_k[(t_n - t_{j-1})_D] \right] \quad (78)$$

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 \mu L}{kbh} \sum_{j=1}^n (e_j - e_{j-1}) F_k[(t_n - t_{j-1})_D] \quad (79)$$

donde  $e_0 = 0$  y  $t_0 = 0$ .

La Ec.(78) puede arreglarse en forma diferente,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,58 \mu L}{kbh} \left[ e_1 \left[ F_k[(t_n)_D] - F_k[(t - t_1)_D] \right] + e_2 \left[ F_k[(t_n - t_1)_D] - \right. \right. \\ \left. \left. - F_k[(t_n - t_2)_D] \right] + \dots + e_{n-1} \left[ F_k[(t_n - t_{n-2})_D] - F_k[(t_n - t_{n-1})_D] \right] + \right. \\ \left. + e_n F_k[(t_n - t_{n-1})_D] \right] \quad (80)$$

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{887,52 \mu L}{kbh} \sum_{j=1}^n e_{n+1-j} \left[ F_k[(t_n - t_{n-j})_D] - F_k[(t_n - t_{n+1-j})_D] \right] \quad (81)$$

donde  $t_0 = 0$ .



# Acuíferos Radiales,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 \mu}{kh} \left[ e_1 \Delta p[(t_n)_D] + (e_2 - e_1) \Delta p[(t_n - t_1)_D] + (e_3 - e_1) \Delta p[(t_n - t_2)_D] + \dots (e_n - e_{n-1}) \Delta p[(t_n - t_{n-1})_D] \right] \quad (82)$$

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 e_1 \mu}{kh} \left[ \Delta p[(t_n)_D] + \sum_{j=2}^n \frac{(e_j - e_{j-1})}{e_1} \Delta p[(t_n - t_{j-1})_D] \right] \quad (83)$$

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 \mu}{kh} \sum_{j=1}^n (e_j - e_{j-1}) \Delta p[(t_n - t_{j-1})_D] \quad (84)$$

donde  $e_0 = 0$  y  $t_0 = 0$ .

La Ec.(82) puede arreglarse en forma diferente,

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 \mu}{kh} e_1 \left[ \Delta p[(t_n)_D] - \Delta p[(t_n - t_1)_D] \right] + e_2 \left[ \Delta p[(t_n - t_1)_D] - \Delta p[(t_n - t_2)_D] \right] + \dots e_{n-1} \left[ \Delta p[(t_n - t_{n-2})_D] - \Delta p[(t_n - t_{n-1})_D] \right] + e_n \Delta p[(t_n - t_{n-1})_D] \quad (85)$$

$$\Delta p = (p_i - p) = \frac{141,2 \mu}{kh} \sum_{j=1}^n e_{n+1-j} \left[ \Delta p[(t_n - t_{n-j})_D] - \Delta p[(t_n - t_{n-j+1})_D] \right] \quad (86)$$

donde  $t_0 = 0$

Debe tenerse presente en las ecuaciones anteriores (Ec.(73) en adelante) que el término  $p$  es la presión al tiempo  $t$  o  $t_n$ . Ya que  $p_i$  se conoce, puede calcularse  $p$ , una vez calculado  $\Delta p$ .

El principio de superposición con el fin de obtener la intrusión (o producción) total, dada la historia de presión, es muy similar al caso anterior. La Fig.55 ilustra la historia de presión de un yacimiento (o contacto agua-petróleo). De nuevo, con el fin de poder aplicar las ecuaciones vistas anteriormente para el caso de presión terminal constante, la historia de presión se aproxima en forma escalonada, y se determinan las caídas de presión (presiones diferenciales o decrementos de presión)  $\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_4, \dots, \Delta p_n$ . (Sobre la forma de obtener estas presiones diferenciales, véase p.145).

Se desea calcular la intrusión total a un tiempo,  $t$ , comprendido entre 0 y  $t_1$ . En este caso, el  $\Delta p_1$  es constante durante este tiempo. Por lo tanto pueden aplicarse las Ecs.(27a), (30a) y (31a) para el caso de acuíferos lineales y las Ecs.(51) y (69) para acuíferos radiales.

Para  $0 \leq t \leq t_1$ :

Acuíferos Lineales,

$$W_e = \frac{\phi b h L_c}{5,615} \Delta p_1 F_k[(t)_D] \quad (87)$$

Acuíferos Radiales,

$$W_e = 1,119 \phi c h R_i^2 \frac{0}{360^\circ} \Delta p_1 Q[(t)_D] \quad (51), (69)$$

Hasta el tiempo  $t_1$ , la presión se ha mantenido constante en  $p = p_i - \Delta p_1$ . Si a éste tiempo  $t_1$ , la presión disminuye en un  $\Delta p_2$  ( $p = p_i - \Delta p_1 - \Delta p_2$ ), habrá un aumento extra en la intrusión para tiempos posteriores. Si el tiempo,  $t$ , a la cual se desea obtener la intrusión total está comprendido entre  $t_1$  y  $t_2$ , tal intrusión se calculará por

la superposición de los efectos:  $\Delta p_1$  que actúa por el tiempo  $(t-0)$ , más  $\Delta p_2$  que actúa con el tiempo  $(t-t_1)$ . En esta forma puede escribirse,

Para  $0 \leq t \leq t_1$ :

Acuíferos Lineales,

$$W_e = \frac{\phi b h L c}{5,615} \Delta p_1 F_k[(t)_D] + \frac{\phi b h L c}{5,615} \Delta p_2 F_k[(t-t_1)_D] \quad (88)$$

Acuíferos Radiales,

$$W_e = 1,119 \phi c h R_1^2 \frac{0}{360^\circ} \Delta p_1 Q[(t)_D] + 1,119 \phi c h R_1^2 \frac{0}{360^\circ} \Delta p_2 Q[(t-t_1)_D] \quad (89)$$

Similarmente, si se desea calcular la intrusión total a un tiempo,  $t$ , comprendido entre  $t_2$  y  $t_3$ , y teniendo en cuenta que el tiempo  $t_2$ , ocurre una caída extra de presión  $\Delta p_3$  (la presión ahora será  $p = p_i - \Delta p_1 - \Delta p_2 - \Delta p_3$ ), el efecto total será la suma de tres efectos:  $\Delta p_1$  que actúa por un tiempo  $(t-t_1)$ ,  $\Delta p_2$  que actúa por un tiempo  $(t-t_1)$  y  $\Delta p_3$  que actúa por un tiempo  $(t-t_2)$ . Por tanto, puede escribirse,

Para  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

Acuíferos Lineales,

$$W_e = \frac{\phi b h L c}{5,615} \Delta p_1 F_k[(t)_D] + \frac{\phi b h L c}{5,615} \Delta p_2 F_k[(t-t_1)_D] +$$

$$+ \frac{\phi b h L c}{5,615} \Delta p_3 F_k[(t-t_1)_D] \quad (9)$$

Acuíferos Radiales,

$$W_e = 1,119\phi chR_1^2 \frac{\theta}{360^\circ} \Delta p_1 Q[(t)_D] + 1,119\phi chR_1^2 \frac{\theta}{360^\circ} \Delta p_2 Q[(t-t_1)_D] +$$

$$+ 1,119\phi chR_1^2 \frac{\theta}{360^\circ} \Delta p_3 Q[(t-t_2)_D] \quad (91)$$

Si al tiempo  $t_3$ , la presión disminuye aún más, por una cantidad  $\Delta p_4$ , para calcular la intrusión total a un tiempo,  $t$ , mayor que  $t_3$ , basta agregar el efecto del  $\Delta p_4$  a las ecuaciones anteriores en forma similar. Así podría continuarse hasta llegar a  $\Delta p_n$  caídas de presión, y la intrusión total a un tiempo,  $t_n$ , será,

Para  $t_n \leq t_{n-1}$ :

Acuíferos Lineales,

$$W_e = \frac{8bhc}{5,615} \left[ \Delta p_1 F_k[(t_n)_D] + \Delta p_2 F_k[(t_n-t_1)_D] + \Delta p_3 F_k[(t_n-t_2)_D] + \dots \right.$$

$$\left. + \Delta p_n F_k[(t_n-t_{n-1})_D] \right] \quad (92)$$

$$W_e = \frac{\phi b h L c}{5,615} \sum_{j=1}^n \Delta p_j F_k[(t_n-t_{j-1})_D] \quad (93)$$

donde  $t_0 = 0$

Acuíferos Radiales,

$$W_e = 1,119\phi chR_1^2 \frac{\theta}{360^\circ} \left[ \Delta p_1 Q[(t_n)_D] + \Delta p_2 Q[(t_n-t_1)_D] + \dots \right.$$

$$\left. + \Delta p_n Q[(t_n-t_{n-1})_D] \right] \quad (94)$$

$$W_e = 1,119 \phi c h R_i^2 \frac{0}{360^\circ} \sum_{j=1}^n A p_j Q [(t_n - t_{j-1})_D] \quad (95)$$

### MÉTODOS DE ANÁLISIS DE YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO

El método de análisis de un yacimiento (o campo) que presenta intrusión de agua (empuje hidráulico) depende de los datos disponibles, de lo que se desee determinar y de las suposiciones sobre comportamiento futuro del yacimiento (predicciones). En la presente sección, se discutirán diferentes métodos de utilizar la historia del yacimiento, con el fin de determinar el tipo de intrusión de agua; además, se discute el análisis de la historia con el propósito de llevarla a expresiones analíticas con el fin principal de hacer predicciones. Posteriormente, se analizarán algunos de los métodos existentes de predicción de acuerdo a lo que se desee determinar: presión, rata de intrusión, etc.

#### Determinación y Forma de Expresar la Intrusión de Agua, $W_e$ .

Una de las formas más sencillas para determinar el término de intrusión  $W_e$ , es por balance de materiales<sup>1</sup>. Lógicamente, este método asume conocidos todos los términos de la ecuación de balances de materiales, excepto  $W_e$ , es decir, asume conocido el petróleo originalmente en el yacimiento,  $N$ , el factor  $m$  (en caso que exista capa de gas inicial), datos de producción y datos PVT.

Cuando se conoce con bastante exactitud los límites del yacimiento y se dispone de un buen mapa isopaco, el valor de  $N$  puede determinarse con bastante exactitud por el método volumétrico,

$$N = \frac{7758 A h \phi (1 - S_w)}{B_{oi}} \quad (96)$$

donde  $N$  se expresa en barriles normales,  $BN$ ;  $A$  en acres;  $h$  en pies y  $B_{oi}$  en  $BV/BN$ . La saturación de agua connata,  $S_w$  y la porosidad,  $\phi$ , pueden determinarse por registros o de análisis de núcleos.  $B_{oi}$  puede conocerse de análisis PVT o por correlaciones.

Otro método<sup>35</sup> para determinar  $N$ , consiste en calcular este valor de la ecuación de balance de materiales a diferentes tiempos, considerando  $W_e=0$  ( $m$ , en caso de existir, debe ser conocido). El valor de  $N$  calculado aumentará con tiempo y la extrapolación gráfica a  $t=0$ , será el valor correcto de  $N$ .

De lo anterior puede afirmarse que el método de análisis de la historia del yacimiento con el fin de expresar la intrusión de agua por una fórmula determinada, dependerá de si se conoce o no con suficiente exactitud el valor del petróleo originalmente en el yacimiento. Por tanto, la discusión se dividirá en dos partes principales:  $N$  conocido y  $N$  desconocido.

#### Análisis de la Historia si se conoce el Petróleo o Gas Original - mente en el Yacimiento, $N$ o $G$ .

Si se conoce este valor, pueden calcularse una serie de valores de  $W_e$ , por balance de materiales ( $m$  debe ser conocido en caso de yacimientos de petróleo con capa de gas inicial) y del análisis de  $W_e$  como función de tiempo y presión en el contacto agua-petróleo, puede obtenerse una expresión para representar la intrusión de agua. Una vez obtenida tal expresión, puede predecirse una intrusión futura, de acuerdo al método usado, como se verá posteriormente.

Las siguientes ecuaciones de balance de materiales<sup>1</sup> se usan para calcular la intrusión de agua,  $W_e$ :

*o p la deducción  
están mal*

a) Yacimiento de petróleo no-saturados (por encima del punto de Burbujeo),

$$W_e = NB_{oi} - (N-N_p) + W_p - W_i \quad (97)$$

ya que por encima del punto de burbujeo, el  $B_o$  depende de la compresibilidad efectiva  $c_e$ , puede escribirse,

$$B_o = B_{oi} + B_{oi} c_e(p_i - p) \quad (98)$$

donde,

$$c_e = \frac{S_o c_o + S_w c_w + c_p}{(1 - S_w)} \quad (99)$$

Reemplazando esta expresión en la Ec.(98), puede escribirse,

$$W_e = N_p B_o - NB_{oi} c_e(p_i - p) + W_p - W_i \quad (100)$$

b) Yacimientos de petróleo saturados,

$$W_e = N \left[ (B_{ti} - B_t) - B_{ti} c_g(p_i - p) - m N_{ti} \left( \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right) \right] - N_p [B_t + (R_p - R_{oi}) B_g] + W_p - W_i - G_i B_{gi} \quad (101)$$

En este caso,

$$c_e = \frac{S_w c_w + c_p}{(1 - S_w)} \quad (102)$$

c) Yacimientos de gas,

$$W_e = G_p B_g - G \left( \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right) + W_p - W_i \quad (103)$$

Como se mencionó antes, debe conocerse el gas originalmente en el ya-

cimiento, G, con el fin de poder calcular  $W_e$ .

Las ecuaciones anteriores son generales y consideran inyección de agua, gas, o ambos, según el caso y lo mismo que compresibilidad del agua y de la formación. Si alguno o algunos de estos términos no existen o se consideran iguales a cero, se eliminan de las ecuaciones correspondientes. Recuérdese que la saturación de agua connata,  $S_w$ , se considera constante e inmóvil.

Aparte del uso de balance de materiales para la determinación de  $W_e$ , se han desarrollado otras fórmulas de acuerdo al comportamiento de presión con tiempo en el contacto agua-petróleo. La intrusión de agua a un yacimiento, generalmente puede dar lugar a tres tipos de respuestas de presión con tiempo: flujo continuo, flujo continuo-modificado y flujo no-continuo. El método de analizar cada caso, para  $W$  conocido, se describe en las siguientes secciones.

Intrusión con Flujo Continuo - Este tipo de intrusión se expresa mediante la fórmula de Schilthuis<sup>36</sup>, donde la rata de intrusión es función lineal de la caída de presión en el contacto agua-petróleo,

$$e = \frac{dW_e}{dt} = C_s(p_i - p) \quad (104)$$

Integrando,

$$W_e = C_s \int_0^t (p_i - p) dt = C_s f(p, t) \quad (105)$$

donde  $C_s$  es la constante de intrusión de agua de Schilthuis, generalmente expresada en bls/tiempo/lpc (donde el tiempo puede ser días, meses, trimestres, etc);  $f(p, t)$  es el valor del integral;  $p_i$  es la presión



sión inicial (original) en el contacto agua-petróleo y  $p$  la presión al tiempo  $t$ .

Como puede observarse, para calcular  $We$ , debe conocerse la historia de presión en el contacto agua-petróleo ( $p$  como función de  $t$ ) y la constante  $C_s$ . A su vez para conocer esta constante es necesario hacer uso de la historia del yacimiento y calcular  $We$  a varios tiempos por la ecuación de balance de materiales. Una vez calculado  $We$  se hace uso de la Ec.(104) para calcular  $C_s$ , escribiendo  $dWe/dt$  en forma de diferencias finitas,

$$C_s = \frac{\frac{\Delta We}{\Delta t}}{(p_i - p)} \quad (106)$$

Generalmente el  $\Delta t$  es constante y en tal caso, el  $\Delta We$  se toma como el promedio de la diferencia entre el  $We$  al tiempo posterior menos el  $We$  al tiempo anterior,

$$\Delta We = \frac{1}{2} (We_{j+1} - We_{j-1}) \quad (107)$$

donde  $j$  es el período a la cual se desea determinar el valor de  $C_s$ . En esta forma se calcula una serie de valores de  $C_s$  (un valor para cada tiempo) y de acuerdo a su variación puede concluirse respecto al tipo de intrusión: si  $C_s$  es más o menos constante con tiempo, puede considerarse que la intrusión sigue condiciones de flujo continuo; por otro lado, si varía mucho con tiempo se concluye que la intrusión sigue otro tipo de flujo (continuo-modificado, o no-continuo). También debe tenerse en cuenta que puede presentarse el caso de obtener una variación considerable al comienzo de la intrusión, donde ocurra un flujo no-continuo, pero luego que el radio llegue a un límite (si el

acuífero es finito), el flujo cambia a semi-contínuo y el valor de  $C_s$ , tiende a ser constante. En este caso, puede tomarse un valor promedio de  $C_s$  en la parte donde presenta valores más o menos constantes y usar tal valor para calcular  $W_e$  a tiempos futuros, según la Ec.(105). Por supuesto, debe asumirse la presión al tiempo futuro, cosa que puede hacerse aproximadamente, si la predicción no es para un tiempo muy largo, extrapolando la curva conocida, de presión como función de tiempo. Como puede verse, este método de predicción no es muy exacto y sólo puede tomarse como una aproximación de lo que puede esperarse. Más adelante se discutirán técnicas mejores de predicción.

El cálculo del integral  $f(p,t)$  de la Ec.(105), puede calcularse fácilmente de la historia del yacimiento, de la cual se conocen una serie de presiones  $p_1, p_1, p_2, p_3 \dots p_n$  a los tiempos  $0, t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  correspondientes. En esta forma a cada tiempo habrá una presión diferencial  $\Delta p$ , que puede definirse de varias maneras, tal como se explica en el Apéndice C, donde se deducen una serie de fórmulas para el cálculo del integral  $f(p,t)$ , teniendo en cuenta, además de la definición de  $\Delta p$ , si los intervalos de tiempo  $\Delta t_j = (t_j - t_{j-1})$  en que se ha dividido la historia del yacimiento, varían o tienen un valor constante.

En general, el integral  $f(p,t)$  de la Ec.(105) puede calcularse por,

$$f(p,t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (2p_j - p_j - p_{j-1}) \Delta t_j \quad (108)$$

$$f(p,t) = p_i \sum_{j=1}^n \Delta t_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_{j-1} + p_j) \Delta t_j \quad (109)$$

Cuando  $j=1$ ,  $p_{j-1} = p_0 = p_i$  y  $t_{j-1} = t_0 = 0$ . Si los intervalos de

tiempo son iguales,  $\Delta t_j = \text{constante} = \Delta t$ ,

$$f(p,t) = \frac{\Delta t}{2} \left[ (2n-1)p_i - p_n - 2 \sum_{j=1}^{n-1} p_j \right] \quad (110)$$

Otras ecuaciones para el cálculo de  $f(p,t)$  se presentan en el Apéndice C.

Intrusión con Flujo Continuo-Modificado..- También se conoce como el método de Hurst Modificado<sup>37</sup>. En este caso, la rata de intrusión, además de ser proporcional a la caída de presión,  $(p_i - p)$  es también función de tiempo. En forma simplificada, se expresa por,

$$e = \frac{dW_e}{dt} = \frac{C_h(p_i - p)}{\log(at)} = \frac{C_h(p_i - p)}{a' + \log(t)} \quad (111)$$

integrando,

$$W_e = C_h \int_0^t \frac{(p_i - p)dt}{\log(at)} = C_h \int_0^t \frac{(p_i - p)dt}{a' + \log(t)} = C_h f(p,t) \quad (112)$$

donde  $C_h$  es la constante de intrusión de agua de Hurst, generalmente expresada en bls/tiempo/lpc (donde tiempo puede ser días, meses, trimestres, etc);  $f(p,t)$  es el valor del integral;  $a$  (o  $a' = \log(a)$ ) es una constante que depende de las unidades de tiempo;  $p_i$  y  $p$  fueron definidos en la Ec.(105).

Como puede observarse, en este caso se requiere el conocimiento de dos constantes,  $C_h$  y  $a$  (o  $a'$ ). Para su determinación, se hace uso de los resultados obtenidos en el caso anterior. Si  $C_s$  varía en la forma que la intrusión de agua no puede representarse por la fórmula de Schilthuis, tal información ( $C_s$  como función  $t$ ) se usa para la determinación

nación de  $C_h$  y  $a$ .

De la Ec.(111) puede escribirse,

$$\frac{\frac{dW_e}{dt}}{(p_i-p)} = \frac{C_h}{\log(at)} = \frac{C_h}{a' + \log(t)} \quad (113)$$

pero el lado izquierdo de esta ecuación es igual al valor de  $C_s$  de la Ec.(104). Por tanto,

$$C_s \log(a) + C_s \log(t) = C_h \quad (114)$$

$$C_s a' + C_s \log(t) = C_h \quad (115)$$

Ya que se  $C_s$  se conoce como función de  $t$ , los mejores valores de las constantes  $C_h$  y  $a'$  pueden determinarse por el método de los mínimos cuadrados<sup>38</sup>. Aplicando la Ec.(115) a cada uno de los tiempos,  $t_j$ , para los que se han calculado,  $C_{sj}$ , y sumando tales ecuaciones, se obtiene la denominada primera ecuación normal,

$$a' \sum_{j=1}^n C_{sj} + \sum_{j=1}^n (C_{sj} \log(t_j)) = nC_h \quad (116)$$

Multipliando cada una de las ecuaciones incluidas en la Ec.(115) por el  $t_j$  correspondiente y sumando como antes, se obtiene la denominada segunda ecuación normal,

$$a' \sum_{j=1}^n (C_{sj} t_j) + \sum_{j=1}^n (C_{sj} t_j \log(t_j)) = C_h \sum_{j=1}^n t_j \quad (117)$$

Resolviendo simultáneamente las Ecs(116) y (117) se puede determinar  $C_h$  y  $a'$  ( y por tanto  $a$ ),

$$C_h = \frac{\sum_{j=1}^n C_{sj} t_j \sum_{j=1}^n C_{sj} \log(t_j) - \sum_{j=1}^n C_{sj} \sum_{j=1}^n C_{sj} \log(t_j)}{n \sum_{j=1}^n C_{sj} t_j - \sum_{j=1}^n C_{sj} \sum_{j=1}^n t_j} \quad (11)$$

$$a' = \frac{\sum_{j=1}^n t_j \sum_{j=1}^n C_{sj} \log(t_j) - n \sum_{j=1}^n C_{sj} t_j \log(t_j)}{n \sum_{j=1}^n C_{sj} t_j - \sum_{j=1}^n C_{sj} \sum_{j=1}^n t_j} = \log a \quad (12)$$

Una vez obtenidos los valores de  $C_h$  y  $a'$  (o  $a$ ) se regresa a la Ec.(112) y se calcula  $W_e$ , conociendo  $p$  como función de  $t$  de la historia del yacimiento. Si los valores de  $W_e$  calculados en esta forma comparan favorablemente con los valores de  $W_e$  calculados por balance de materiales, la Ec.(112) representa adecuadamente la intrusión de agua al yacimiento y podría calcularse luego  $W_e$  en el futuro, siempre y cuando se conozca  $p$  al tiempo futuro. En lugar de calcular  $W_e$ , y quizás sea más práctico, se puede verificar si las constantes  $C_h$  y  $a'$  representan adecuadamente la intrusión, calculando la rata de intrusión,  $e = dW_e/dt$ , por la Ec.(111). Si este valor compara favorablemente con la rata de intrusión calculada por balance de materiales, al calcular  $C_s$ , Ec.(106) los valores  $C_h$  y  $a'$  (y  $a$ ) se consideran satisfactorios y  $W_e$  puede calcularse a partir de la Ec.(112). Si los valores de  $e$  o  $W_e$  no comparan favorablemente, la intrusión debe expresarse en forma diferente.

Para el cálculo de  $W_e$ , es necesario determinar el integral de la Ec.(112). El Apéndice C incluye la deducción de fórmulas para el cálculo de este integral, de donde se han tomado las siguientes,

$$f(p,t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(p_i - p_n)}{\log(at_n)} (t_n - t_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(p_i - p_j)}{\log(at_j)} (t_{j+1} - t_{j-1}) \right] \quad (120)$$

donde  $t_0 = 0$ . Si los periodos de tiempo son iguales,  $\Delta t_j = \text{constante} = \Delta t$ ,

$$f(p,t) = 2\Delta t \left[ \frac{(p_i - p_n)}{\log(at_n)} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(p_i - p_j)}{\log(at_j)} \right] \quad (121)$$

Intrusión con Flujo No-Continuo..- Generalmente se conoce como el método de van Everdingen y Hurst<sup>7</sup>. En este caso, la intrusión total de agua a un yacimiento se expresa por las ecuaciones discutidas anteriormente, Ecs.(93) y (95), para acuíferos lineales y radiales respectivamente,

$$W_e = \frac{\phi b h L c}{5,615} \sum_{j=1}^n \Delta p_j E_k[(t_n - t_{j-1})_D] \quad (93)$$

$$W_e = 1,119 \phi c h R_i^2 \frac{\theta}{360^\circ} \sum_{j=1}^n \Delta p_j Q[(t_n - t_{j-1})_D] \quad (94)$$

donde  $t_0 = 0$ . En general, estas ecuaciones pueden escribirse,

$$W_e = C_v \sum_{j=1}^n \Delta p_j Q[(t_n - t_{j-1})] = C_v f(p,t) \quad (122)$$

donde la constante  $C_v$  (denominada comunmente B), está definida por:

Acuíferos Lineales,

$$C_v = \frac{\phi b h L c}{5,615} \text{ barriles/lpc.} \quad (123)$$

Acuíferos Radiales,

$$C_v = 1,119 \phi c h R_1^2 \frac{0}{360^\circ} \text{ barriles/lpc} \quad (124)$$

donde  $c$  es la compresibilidad efectiva del acuífero, es decir, incluye además de la compresibilidad del agua, la compresibilidad de la formación ( $c=c_w+c_f$ ). Si el acuífero es lineal  $Q[(t_n-t_{j-1})_D]=r_k[(t_n-t_{j-1})_D]$

En la deducción de las Ecs.(93) y (95) se hizo referencia a la Fig.55, donde aparece la historia de presión (presión como función de tiempo) como una línea continua y en forma escalonada, con el fin de poder aplicar al principio de superposición discutido. En la práctica, se conocen una serie de presiones  $p_1, p_1, p_2 \dots p_n$  a los tiempos  $0, t_1, t_2 \dots t_n$ . El método más común y posiblemente el más usado para obtener los incrementos de presión,  $\Delta p_j$ , es el propuesto por van Everdingen y otros<sup>30</sup>, enunciado en la siguiente forma: la caída de presión a cualquier tiempo, puede tomarse como la mitad de la caída de presión en el intervalo anterior, más la mitad de la caída de presión en el intervalo posterior. Lógicamente, para la primera caída de presión, a mitad del intervalo anterior será cero. En forma analítica:

$$\Delta p_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (p_j - p_1) = \frac{1}{2} \cdot (p_i - p_1)$$

$$\Delta p_2 = \frac{1}{2} \cdot (p_i - p_1) + \frac{1}{2} \cdot (p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \cdot (p_i - p_2)$$

$$\Delta p_3 = \frac{1}{2} \cdot (p_1 - p_2) + \frac{1}{2} \cdot (p_2 - p_3) = \frac{1}{2} \cdot (p_i - p_3)$$

$$\Delta p_4 = \frac{1}{2} \cdot (p_2 - p_3) + \frac{1}{2} \cdot (p_3 - p_4) = \frac{1}{2} \cdot (p_2 - p_4)$$

⋮

⋮

$$\Delta p_j = \frac{1}{2} \cdot (p_{j-2} - p_{j-1}) + \frac{1}{2} \cdot (p_{j-1} - p_j) = \frac{1}{2} \cdot (p_{j-2} - p_j)$$

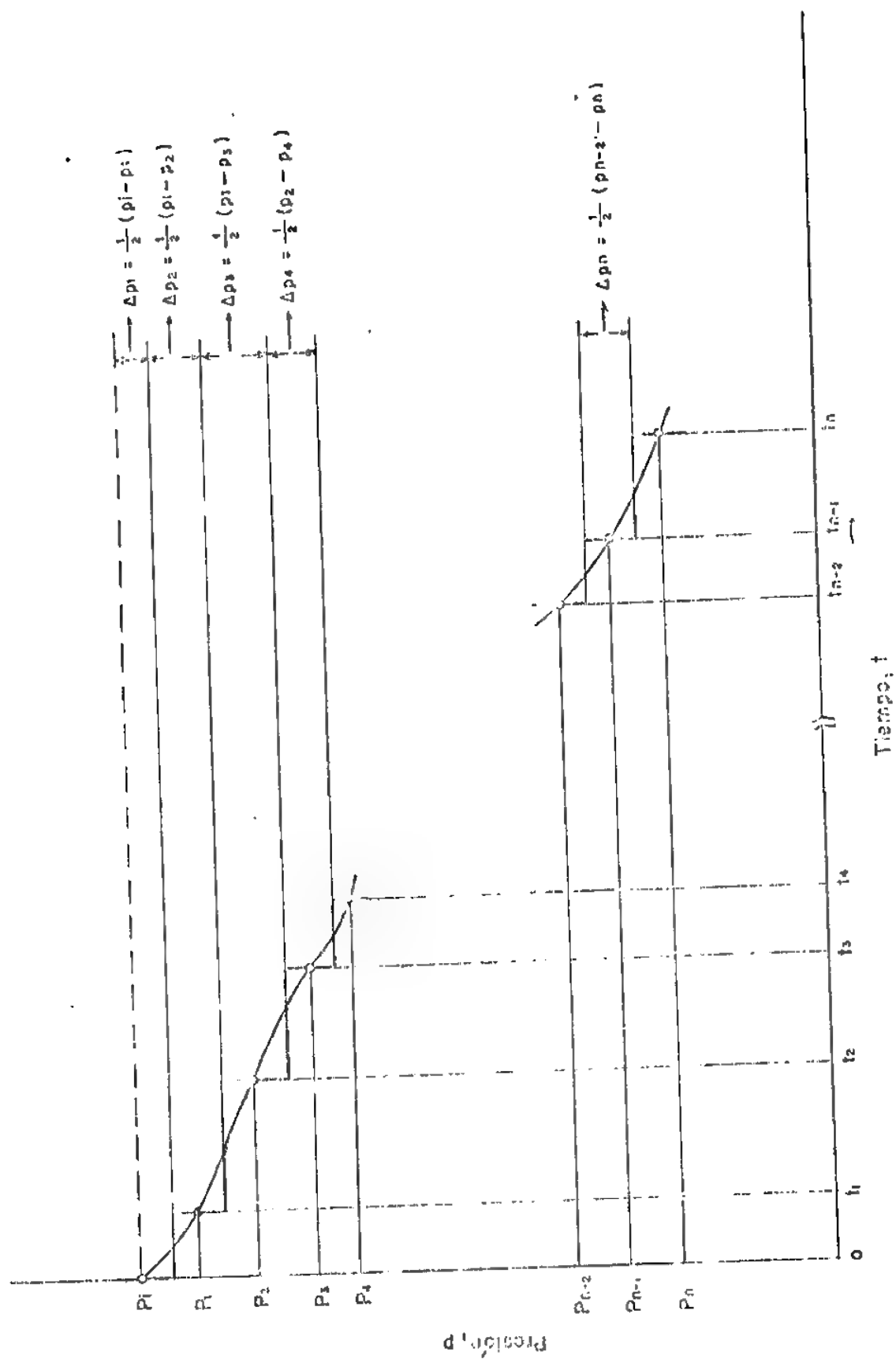


Fig. 55.— Historia de presión de un yacimiento (contacto agua— petróleo) donde indica la presión establecida.



$$\Delta p_n = \frac{1}{2}(p_{n-2} - p_{n-1}) + \frac{1}{2}(p_{n-1} - p_n) = \frac{1}{2}(p_{n-2} - p_n) \quad (125)$$

La Fig.55 ilustra las ecuaciones anteriores.

Los valores de  $\Delta p_j$ , también pueden obtenerse "a ojo", para lo cual se gráfica  $p$  como función de  $t$  y se traza una curva continua. Luego, "a ojo" se toman los  $\Delta p_j$ , de acuerdo a la forma de la curva tratando de compensar las pequeñas áreas triangulares que quedan por debajo y por encima de la curva al tomar cada  $\Delta p_j$ . Finalmente, se leen nuevos valores de  $p_j$  y  $t_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots n$ ).

La obtención de  $F_k(t_D)$  y  $Q(t_D)$  fué ampliamente discutida, de acuerdo al tamaño y condiciones iniciales y de límite impuestas al acuífero. Recuérdese que para acuíferos lineales y acuíferos radiales infinitos, los valores de  $F_k(t_D)$  y  $Q(t_D)$  se han determinado como función de  $t_D$ , Tablas I, IV y Figs. 10, 26 y 27; en cambio para acuíferos radiales finitos (limitados),  $Q(t_D)$  es función de  $t_D$  y  $r_{eD}$ , Tablas VII y Figs. 35 a 39. Por tanto, la aplicación de la Ec.(122) exige conocimiento de: (1) tipo de acuífero: lineal o radial. (2) tamaño: infinito o finito, (3) si finito: acuífero cerrado o acuífero comunicado a una fuente de abastecimiento de agua. Por otro lado, la obtención del tiempo adimensional,  $t_D$ , requiere el conocimiento de una constante,  $\Delta t_D$ , para convertir tiempos reales a tiempos adimensionales:

Acuíferos Lineales,

$$t_D = \frac{0,006323kt}{\phi \mu c L^2} = \Delta t_D t \quad (126)$$

Acuíferos Radiales,

$$t_D = \frac{0,006323kt}{\phi \mu c R_1^2} = At_D \quad (12)$$

Como puede observarse, tanto la constante  $C_v$  como  $At_D$ , requieren datos del acuífero:  $\phi$ ,  $c$ ,  $R$ , (o  $L$ ), valores comunes a  $C_v$  y  $At_D$ . Para acuíferos radiales, a medida que el producto  $\phi c R_1^2$  aumenta,  $At_D$  disminuye y  $C_v$  aumenta. Por tanto, valores que definen a  $At_D$ , parcialmente definen a  $C_v$ . Además, los valores  $k$  y  $\mu$  se encuentran en  $At_D$ , y  $h$  y  $\theta$  (o  $b$ ) se encuentran en  $C_v$ . La mayoría de esta información se conoce con poca exactitud o es necesario asumirse, a no ser que se perfora un pozo dentro del acuífero, con lo cual puede determinarse parte de tal información con mejor exactitud. Generalmente,  $\phi$ ,  $k$  y  $h$  se toman igual a los valores correspondientes promedio para la formación de la zona de petróleo;  $\mu$  y  $c$ , se toman como los valores del agua de formación y muchas veces no se toma en cuenta la compresibilidad de la formación del acuífero;  $R_1$ ,  $\theta$ ,  $b$  y  $L$  (este último valor para el caso de acuíferos limitados), se obtienen de acuerdo al tipo de estructura yacimiento-acuífero y del conocimiento del tamaño y forma del mismo. En esta forma,  $C_v$  y  $At_D$ , pueden calcularse de información conocida, pero tales valores deben tomarse como "valores guías", ya que los "valores verdaderos" es necesario determinarlos de la historia del yacimiento, es decir,  $C_v$  y  $At_D$  son incógnitas en la Ec.(122). Además, si el acuífero es radial y finito, debe conocerse el valor de  $r_{ep}$ , con el fin de evaluar  $Q(t_D)$ .

Para probar si  $W_e$  de la historia del yacimiento ( $W_e$  calculado por balance de materiales, en función de presión en el contacto agua-petróleo y tiempo), puede representarse por la Ec.(122), es necesario hacerse por ensayo y error (tanteo): en caso de que el acuífero pueda

considerarse infinito, se prueban diferentes valores de  $\Delta t_D$  y si el  $a -$  cuífero es finito (limitado) deben probarse diferentes valores de  $r_{eD}$ , y para cada uno de estos valores, probarse valores de  $\Delta t_D$ . La exactitud de estas constantes se verifica por la consistencia del valor de  $C_v$ , calculado por,

$$C_v = \frac{W_e \text{ (Balance de Materiales)}}{\sum_{j=1}^n \Delta p_j Q[(t_n - t_{j-1})_D]} \quad (128)$$

Si esta razón permanece más o menos constante para determinados valores de  $\Delta t_D$  y  $r_{eD}$ , es porque  $W_e$  puede expresarse por la Ec.(122) y el mejor valor de  $C_v$  puede tomarse como un promedio de los valores calculados con la Ec.(126).

El procedimiento de análisis más recomendado es el siguiente: Si  $r_{eD}$  puede considerarse infinito o determinarse con suficiente exactitud, se calcula un valor aproximado de  $\Delta t_D$  con los datos conocidos (o conocidos y asumidos). Luego se toman valores mayores y menores de  $\Delta t_D$  y para cada uno de estos valores se calcula  $n$  valores de  $C_v$  de la Ec.(128). Se determinan un  $C_v$  promedio para cada valor de  $\Delta t_D$ ,

$$C_{vp} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C_{vj} \quad (129)$$

y se calcula la desviación normal correspondiente,

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n (C_{vpj} - C_{vj})^2} \quad (130)$$

Finalmente, se gráfica la desviación normal como función de los valores de  $\Delta t_D$  considerados y donde ocurra un mínimo en la  $\sigma$ , se toma co-

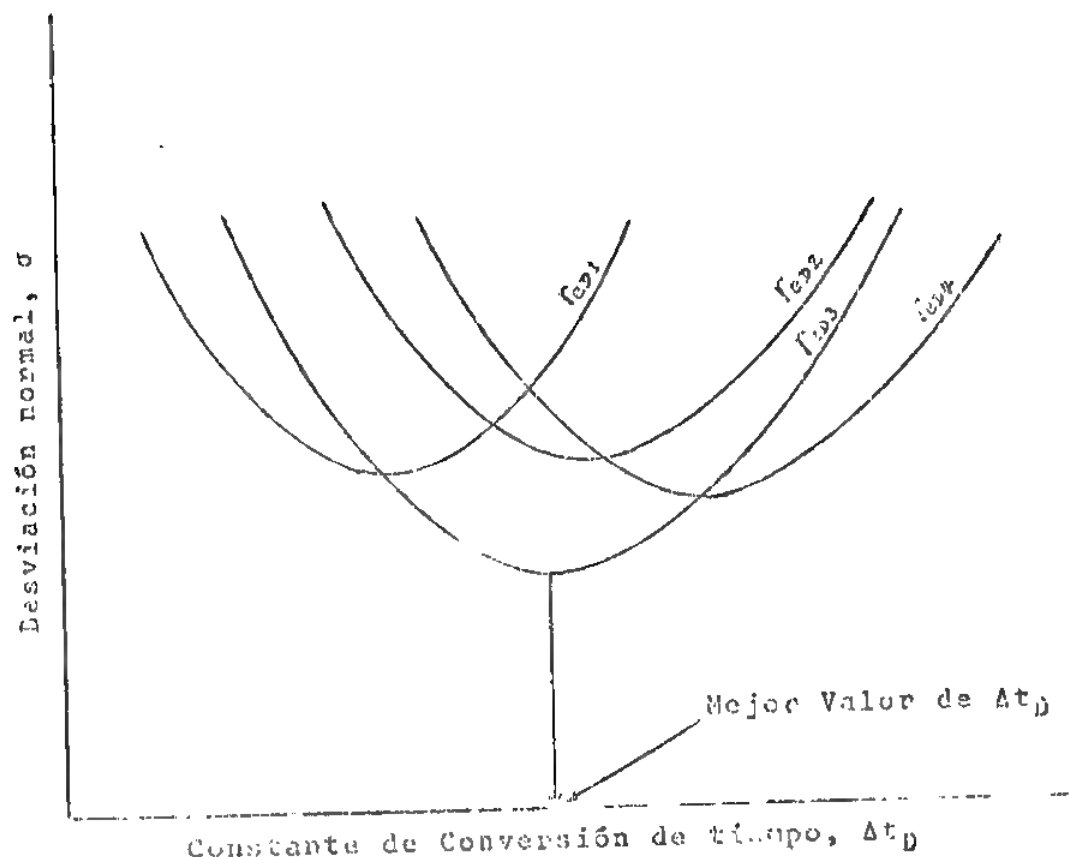


Fig. 56 - Gráfico esperado de desviación normal,  $\sigma$  como función de la constante de conversión,  $At_D$ , para determinar el mejor valor de  $At_D$ . Para cada curva,  $r_{0D}$  = constante.

mo el mejor valor de  $At_D$ , tal como ilustra la Fig. 56. A veces puede ser más práctico graficar  $\sigma$  como función de  $\log(At_D)$ , ya que puede visualizarse mejor el mínimo de  $\sigma$ .

Con el mejor valor de  $At_D$  obtenido, se determina el  $C_{VP}$  correspondiente que será el mejor valor de  $C_V$ . Si no se conoce  $r_{0D}$ , se asumen diferentes valores y para cada  $r_{0D}$  asumido se hacen los cálculos indicados antes. Finalmente se tendrá un gráfico de  $\sigma$  como función de los valores de  $At_D$  considerados, una curva para cada valor de

$r_{ed}$  asumido. La curva que presenta el mínimo valor de  $\sigma$ , será la del mejor  $r_{ed}$  y en el punto de mínimo se toma el  $At_D$  correspondiente como el mejor valor de  $At_D$ . Con este valor se regresa y se calcula el  $C_v$  correspondiente, que será el mejor valor de  $C_v$ .

Análisis de la Historia si se Desconoce el Petróleo o Gas Originalmente en el Yacimiento.-

En este caso, habrá una incógnita más, o sea el valor de  $N$ . Como en el caso anterior, se hace uso de la ecuación de balance de materiales, pero en forma diferente. Esta ecuación se ordena en tal forma de agrupar los términos tal que se obtenga la ecuación de una línea recta. La pendiente de tal línea recta es la constante de intrusión,  $C_g$ ,  $C_h$  o  $C_v$  y el intercepto, el valor de  $N$ . Las variables son cantidades que pueden calcularse de datos de presión y de producción. Una vez determinada la fórmula por la que va a expresarse la intrusión de agua tal que se cumpla la linealidad de la ecuación, los mejores valores de la constante de intrusión y del petróleo originalmente en el yacimiento, se obtienen por mínimos cuadrados<sup>33</sup>.

Si se despeja  $N$  de la ecuación general de balance de materiales, Ec.(101), puede escribirse,

$$N = \frac{N_p [B_t + (R_p - R_{si}) B_g] + W_p - W_e - W_i - G_i B_{gi}}{(B_t - B_{ti}) + m B_{ti} \left[ \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right] + B_{ti} c_e (p_i - p)}$$

Se puede multiplicar  $\times (1 - \alpha_w)$  para hacer la ecuación en  $C_v$  o  $C_h$  en el caso de

$\frac{S_w c_w + c_p}{(1 - \alpha_w)}$

donde  $c_e$  está dado por la Ec.(102). Si se define como  $D$ , el denominador de la ecuación anterior, puede escribirse,

$$N = \frac{N_p [B_t + (R_p - R_{si}) B_g] + W_p - W_i - G_i B_{gi}}{D} - \frac{W_e}{D} \quad (132)$$

Si además, se define,

$$Y = \frac{N_p [B_t + (R_p - R_{si}) B_g] + W_p - W_i - G_i B_{ig}}{D} \quad (133)$$

y el valor de  $W_e$  se expresa por,

$$W_e = C f(p, t) \quad (134)$$

donde C puede ser  $C_s$ ,  $C_h$  o  $C_v$  y  $f(p, t)$  son los valores correspondientes al integral en las Ecs. (105) y (112) o a la sumatoria de la Ec. (122). Por último si se define,

$$X = f(p, t) / D \quad (135)$$

La Ec. (132) puede escribirse,

$$Y = CX + N \quad (136)$$

Para yacimientos de petróleo no-saturados, Ecs. (97) y (100), puede escribirse,

$$N = \frac{N_p B_o + W_p - W_i}{(B_o - B_{oi})} - \frac{W_e}{(B_o - B_{oi})} \quad (137)$$

$$N = \frac{N_p B_o + W_p - W_i}{B_{oi} c_e (p_i - p)} - \frac{W_e}{B_{oi} c_e (p_i - p)} \quad (138)$$

donde  $c_e$  está dado por la Ec. (99). Si  $W_e$  se reemplaza por la Ec. (134) y se define,

$$Y = \frac{N_p B_o + W_p - W_i}{(B_o - B_{oi})} = \frac{N_p B_o + W_p - W_i}{B_{oi} c_e (p_i - p)} \quad (139)$$

$$X = \frac{f(p, t)}{(B_o - B_{oi})} = \frac{f(p, t)}{B_{oi} c_e (p_i - p)} \quad (140)$$

Las Ecs.(137) y (136), pueden expresarse por la Ec.(136).

Finalmente, para yacimientos de gas, Ec.(103),

$$G = \frac{G_p B_g + W_p - W_i}{\left[ \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right]} - \frac{W_e}{\left[ \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right]} \quad (141)$$

Si se reemplaza  $W_e$  por la Ec.(134) y definiendo,

$$Y = \frac{G_p B_g + W_p - W_i}{\left[ \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right]} \quad (142)$$

$$X = - \frac{t(p, t)}{\left[ \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right]} \quad (143)$$

La Ec.(141) puede escribirse,

$$Y = CX + G \quad (144)$$

Esta ecuación es similar a la Ec.(136), excepto que aparece  $G$  en lugar de  $N$ . Por tanto, cualquiera que sea de tipo de yacimiento, la ecuación de balance de materiales puede expresarse por medio de una línea recta. Los valores de  $C$  y  $N$  o  $G$  son constantes; el valor de  $Y$  es función de datos de producción:  $N_p$ ,  $G_p$ ,  $R_p$ ,  $W_p$ ; de datos de inyección:  $W_i$ ,  $G_i$ ,  $B_{gi}$ ; de presión (datos PVT):  $B_{ti}$ ,  $B_{oi}$ ,  $B_t$ ,  $B_{gi}$ ,  $B_g$ ,  $R_{si}$ ; del tamaño de la capa de gas,  $m$ ; de la saturación de agua connata,  $S_w$  y de las compresibilidades de la formación y del agua de formación,  $c_p$  y  $c_w$ , en la zona de petróleo. A su vez, producción y presión son funciones de tiempo.

Por tanto, Y es función de tiempo. El valor de X depende del tamaño de la capa de gas, saturación de agua, compresibilidades, presión (datos PVT),  $f(p,t)$ , el que a su vez depende tiempo y datos específicos de acuerdo al tipo de intrusión, según se discutió anteriormente. En esta forma, para cada tiempo de la historia del yacimiento pueden calcularse valores de Y y X. Aplicando estos valores a la Ec.(136) o (144) pueden calcularse los valores de C y N o G.

Al igual que en el caso en que N es conocido, a continuación se presenta un análisis para la determinación de C y N, de acuerdo al tipo de intrusión.

Intrusión con Flujo Continuo.- La intrusión de agua se expresa por la Ec.(105). El valor del integral  $f(p,t)$  de esta ecuación, se calcula a partir de la historia de presión por las Ec.(108) a (110) u otras ecuaciones, tal como se explica en el Apéndice C. A cada tiempo de la historia se calcula un valor de Y y X. El mejor valor de C ( $C_s$ ) N o G, se obtienen aplicando mínimos cuadrados, según las ecuaciones deducidas en el Apéndice D,

$$C = \frac{n \sum_{j=1}^n X_j Y_j - \left( \sum_{j=1}^n X_j \right) \left( \sum_{j=1}^n Y_j \right)}{n \sum_{j=1}^n X_j^2 - \left[ \left( \sum_{j=1}^n X_j \right) \right]^2} \quad (145)$$

$$N \text{ (o G)} = \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n Y_j - C \sum_{j=1}^n X_j \right] \quad (146)$$

En lugar de la Ec.(145) puede usarse la Ec.(5D) del Apéndice D. Además, se recomienda al calcular los mejores valores de C y N o G, tomar el promedio de los valores calculados aplicando mínimos cuadrados,



primero considerando línea de regresión de Y sobre X y luego línea de regresión de X sobre Y, según ecuaciones incluidas en el Apéndice D.

Una vez calculado el mejor valor de C y N o G se regresa y se calcula  $W_e$  por balance de materiales y por la Ec.(105) de Schilthuis y se comparan los valores. Si comparan favorablemente dentro de los límites de error permisibles, la intrusión de agua sigue flujo continuo y los valores de C y N o G calculados representan para el yacimiento, la constante de intrusión de agua de Schilthuis y el valor de petróleo o gas originalmente en el yacimiento. Si los valores de  $W_e$  varían mucho uno del otro, la intrusión de agua no sigue flujo continuo.

El análisis de este tipo de intrusión puede hacerse en forma diferente y quizás sea la forma más práctica, especialmente si los cálculos se hacen manualmente (calculadoras, de escritorio). Es el método de Graficaciones Sucesivas, sugerido por Havlena y Odeh<sup>40</sup>. Una vez calculados los valores de Y y X se grafican en papel normal. En esta forma se imparte un significado dinámico a cada punto calculado, ya que dependiendo de la forma del gráfico resultante, puede concluirse respecto al yacimiento (tipo, tamaño) y a los valores que deben variarse para continuar el análisis. Si el gráfico resultante es una línea recta o muy cercana a ella, se calculan los mejores valores de C y N o G por mínimos cuadrados y se chequean con los valores obtenidos del gráfico, y que la pendiente es igual a C y el intercepto es igual a N o G. Si los puntos se apartan mucho de una línea recta, la intrusión no sigue flujo continuo y debe considerarse otro tipo de intrusión.

A veces el acuífero es muy pequeño y la intrusión de agua puede expresarse por <sup>40</sup>,

$$W_e = C'(p_i - p) \quad (147)$$

donde  $C' = Wc_w$  y  $W$  = volumen de agua en el acuífero. En este caso, para el cálculo de  $X$  se usa  $(p_i - p)$  en lugar de  $f(p, t)$  y el gráfico de  $Y$  contra  $X$  se analiza en forma similar. Si ocurre linealidad, se determina  $C'$  y  $N$  o  $G$  por mínimos cuadrados y se compara con los valores obtenidos del gráfico. Del valor de  $C'$  puede determinarse el volumen de agua del acuífero,  $W$ .

El sentido de variación de  $Y$  y  $X$  en este caso ocurre en forma diferente. El valor de  $X$  disminuye a medida que la presión disminuye, o sea, a medida que el tiempo aumenta. Esto es debido a que el denominador de  $Y$  y  $X$  aumenta más rápido que  $(p_i - p)$  a medida que  $p$  disminuye y ya que  $C'$  es siempre positivo (pendiente de la línea recta), luego  $Y$  debe disminuir a medida que la presión disminuye. En esta forma los puntos del gráfico varían en sentido inverso, o sea que  $Y$  y  $X$  disminuyen a medida que  $p$  disminuye (tiempo aumenta).

De lo anterior puede concluirse que el acuífero es muy pequeño y se calcula  $N$  o  $G$  a partir de la ecuación de balance de materiales (se considera igual a cero), el valor aparente de  $N$  o  $G$  calculado (realmente se calcula el valor de  $Y$ ) disminuye con tiempo. En la práctica puede ocurrir que al comienzo de la intrusión el comportamiento del acuífero siga flujo no-continuo, la variación de  $Y$  y  $X$  sea normal, es decir, aumentan con tiempo, y luego, si cumple la Ec.(147), los valores de  $Y$  y  $X$  disminuyen con tiempo. El punto de cambio de pendiente ocurre al cambiar de flujo no-continuo a continuo.

Intrusión con Flujo Continuo-Modificado..- La intrusión se expresa por la Ec.(112) y para el cálculo del integral  $t(p, t)$  de esta ecuación

además de requerir la historia de presión, es necesario conocer el valor de la constante de conversión de tiempo  $a$ . El Procedimiento de calculado es el siguiente:

(1) - Se calculan valores de  $Y$  para los tiempos en que existe historia del yacimiento, Ecs.(133), (139) o (142).

(2) - Para un valor considerado (determinado aproximadamente en la forma indicada más adelante) de la constante  $a$ , se calculan valores de  $X$  para los mismos tiempos en que se calculó  $Y$ .

(3) - Se repite el Paso (2) para otros valores usuales de  $a$ .

(4) - Para cada valor de  $a$ , se obtienen los mejores valores de  $C$  y  $N$  o  $G$  por mínimos cuadrados, Ecs.(145) y (146). Apéndice D.

(5) - Para cada valor de  $a$ , con los mejores valores de  $C$  y  $N$  o  $G$  obtenidos en (4) y los valores de  $X$  calculados en (2) y (3), se calculan una serie de valores de  $Y_c$  por la Ec.(136), o (144).

(6) - Para cada valor de  $a$  y los valores de  $Y$  calculados en (1) y  $Y_c$  calculados en (5), se determina la desviación normal, y el porcentaje de desviación normal,  $\% \sigma$ ,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_j - Y_{cj})^2} \quad (148)$$

$$\% \sigma = 100 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{Y_j - Y_{cj}}{Y_j} \right]^2} \quad (149)$$

(7) - Se grafican los valores de  $\sigma$  (o  $\% \sigma$ ) como función de  $a$ . El valor de  $a$  correspondiente a la desviación normal mínima, es el

mejor valor de  $a$  para el acuífero. Dependiendo del intervalo de variación de  $a$ , puede graficarse el valor de  $a'$  ( $\log(a)$ ) como función de  $\sigma$ , obteniéndose un mínimo mejor definido. Sea cual fuere el gráfico, la forma de la curva resultante es del tipo ilustrado en la Fig.56.

Para determinar los mejores valores de  $C$  y  $N$  o  $G$ , se grafican estos valores como función de  $\sigma$  y donde ocurra el mínimo valor de  $\sigma$ , se leen los mejores valores de  $C$  ( $C_h$ ) y  $N$  o  $G$ . Es también recomendado graficar  $C$  y  $N$  o  $G$  contra tiempo real y analizar su variación. Los mejores valores de  $C$  y  $N$  o  $G$  deben presentar la mínima variación con tiempo.

(3) Finalmente, con el mejor valor de  $N$  o  $G$  se calcula  $W_0$  por balance de materiales y con los mejores valores de  $C_h$  y  $a$  (o  $a'$ ) se calcula también  $W_0$  por la Ec.(112) de Hurst Modificada. Si estos valores chequean satisfactoriamente, la intrusión de agua puede representarse por la Ec.(112); de lo contrario, la intrusión no sigue condiciones de flujo continuo-modificado.

La primera aproximación del valor de  $a$ , puede obtenerse a partir de los resultados al analizar la historia del yacimiento para flujo continuo. De este análisis se toma el valor de  $N$  o  $G$  y se calcula el valor de  $a$  por el método discutido en caso de conocer  $N$  o  $G$ . Con valores de  $a$  mayores y menores al obtenido en esta forma, se calcula el Paso (3).

El caso de flujo continuo modificado, también puede analizarse por graficaciones sucesivas de Havlena y Odeh. Se calculan los Pasos (1) y (2) del procedimiento anterior, se grafica  $Y$  (ordenada) como función de  $X$  y se analiza la curva resultante. Si indica una línea re-

ta, se calcula  $C$  ( $C_h$ ) y  $N$  por mínimos cuadrados para el valor correspondiente de  $a$ . Si presenta curvatura hacia abajo, el valor de  $a$  es muy grande y si la curvatura es hacia arriba el valor de  $a$  es muy pequeño, Fig. 57. En esta forma, modificando el valor de  $a$ , se repite el Paso (2), se gráfica de nuevo y así sucesivamente hasta obtener la mejor línea recta. Finalmente se obtienen los mejores valores de  $C$  ( $C_h$ ) y  $N$  o  $G$  y se prueban si estos valores representan adecuadamente el acuífero, según el Paso (8). Puede suceder que el gráfico resultante no presente uno de los tipos de curva mencionados, sino otra forma caprichosa. Tal situación puede deberse a uno o varias de las siguientes razones: (1) datos errados, (2) cálculos errados y (3) el acuífero no se comporta según este tipo de intrusión. En tal caso se recomienda analizar la historia considerando flujo no-continuo.

En general, este método de flujo continuo-modificado es poco usado en la práctica y directamente en el análisis de un yacimiento consideran flujo no-continuo. Sin embargo, ya que la intrusión  $W_a$ , es función de presión y de tiempo, en este aspecto se asemeja al flujo no-continuo, discutido a continuación. Además es lógico suponer, que si un yacimiento cumple flujo continuo-modificado, con mayor razón se espera que cumpla flujo no-continuo. Esta puede ser una de las razones por las cuales no sea muy usado en la práctica.

Intrusión con Flujo No-Continuo.- Este caso es bastante similar al caso anterior ya que la sumatoria  $f(p,t)$  de la Ec. (122), igualmente depende de una constante de conversión de tiempo  $At_D$ , según se discutió anteriormente. Además el valor de  $f(p,t)$  depende del radio adimensional  $r_{eD}$ . El método más común de análisis de este caso se debe a van Everdingen, Timmerman y McMahon<sup>39</sup>, y generalmente se conoce co

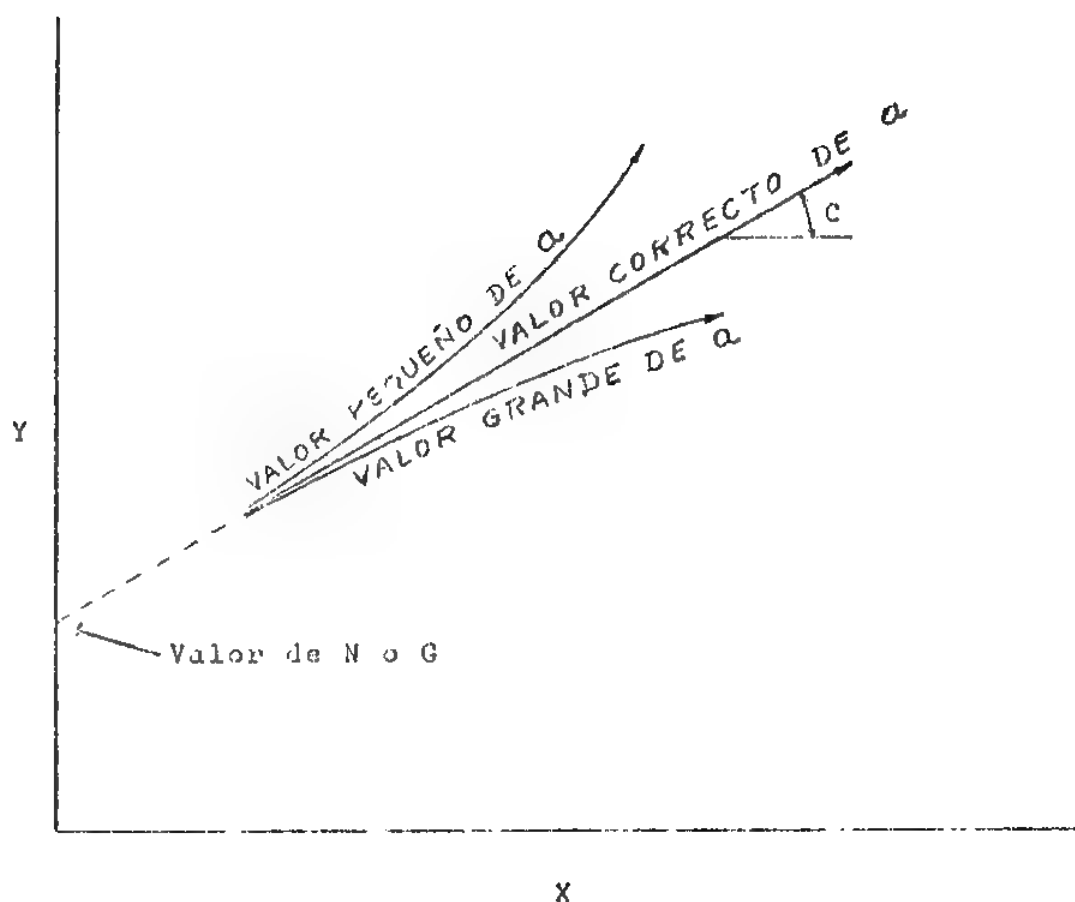


Fig.57 - Curvas típicas de Y como función de X para diferentes valores de  $a$  en el análisis de intrusión de agua con flujo continuo-modificado.

mo método de VTM. El método sugerido por Havlena y Odeh<sup>40</sup> es también muy usado. McEuen<sup>41</sup> y Stanley<sup>42</sup> presentan formas diferentes de análisis de este caso. Debido a que en un yacimiento determinado puede adaptarse mejor un método que otro, los métodos mencionados serán discutidos comenzando por el método VTM.

Método VTM. - Este método se adaptó al análisis del caso anterior de flujo continuo-modificado, donde  $f(p,t)$  solo depende de una constante de tiempo,  $a$  (o  $a'$ ). En caso de flujo no-continuo,  $f(p,t)$  dependerá solo de  $At_D$  en acuíferos infinitos y además de  $r_{oD}$  en acuíferos finitos.

Si se trata de acuíferos infinitos donde  $f(p,t)$  depende solo de  $At_D$ , este valor se calcula aproximadamente con la mejor información conocida del campo de acuerdo a su definición, Ecs.(126) y (127). Se toman valores de  $At_D$  menores y mayores al valor calculado. La variación de  $At_D$  depende del criterio individual y de la exactitud de la información del campo usada para el cálculo inicial de  $At_D$ . Una vez seleccionados los valores de  $At_D$ , se efectúan los Pasos (1) al (7) del procedimiento explicado en el caso anterior, tomando  $At_D$  en lugar de  $a$ , y por supuesto, el valor de  $C$  obtenido, será la constante de intrusión de van Everdingen y Hurst,  $C_v$ . El Paso (8) se modifica en la siguiente forma:

(8) - Los mejores valores de  $At_D$  y  $C_v$  obtenidos en el Paso anterior, pueden comprobarse multiplicándolos entre sí y comparando este producto con el valor obtenido de datos de campo de acuerdo a sus definiciones, Ec.(124) x Ec.(127),

$$(At_D)(C_v) = \frac{(1,119)(0,006323)kh0^0}{360 \mu} \quad (150)$$

$$(At_D)(C_v) = \frac{(19,65 \times 10^{-6})kh0^0}{\mu} \quad (151)$$

Si  $kh0^0/\mu$  se conoce con un buen grado de exactitud, esta relación contribuye a un chequeo de  $At_D$  y  $C_v$ .

Si no ocurre error en los cálculos y la información es representativa del campo, se considera que los valores de las constantes  $At_D$  y  $C_v$  representan adecuadamente la intrusión de agua. El paso final consiste en corregir (ajustar), si es necesario, los datos de presión de la historia del yacimiento, calculando  $W_R$  tanto por balance de

materiales, como por la ecuación de van Everdingen y Hurst, en tal forma que los valores de  $W_e$  calculados por ambos métodos, varíe dentro de una aproximación normal. Las presiones corregidas serán las usadas en el resto de los cálculos del yacimiento. Es entendido que si la intrusión calculada por ambos métodos varía demasiado, puede ocurrir que la información del yacimiento o los cálculos estén errados.

Si el valor de  $r_{ep}$  es desconocido, es necesario asumir valores de esta constante y para cada valor de  $r_{ep}$  repetir los Pasos (1) a (7) descritos. Para cada valor de  $r_{ep}$  se grafica  $\sigma$  como función de  $At_D$  (o  $\log(Ac_D)$ ),  $C_v$  y  $N$  o  $G$ . La curva que presente la mínima desviación normal, en este punto se leen los mejores valores de  $At_D$ ,  $C_v$  y  $N$  o  $G$ . El valor de  $r_{ep}$  correspondiente será el mejor valor de  $r_{ep}$ . Finalmente se efectúa el Paso (3) anterior.

Método de Havlena y Odeh. - En forma similar a los casos anteriores, la intrusión de agua con flujo no-continuo puede analizarse por el método de graficaciones sucesivas de Havlena y Odeh<sup>40</sup>. Una vez calculados los valores de  $Y$  y  $X$  se grafican en papel normal. De acuerdo a la forma de la curva resultante, puede continuarse el análisis en forma lógica. La Fig.58 presenta dos casos principales que pueden resultar. Además de estos casos, puede ocurrir que los puntos graficados se presenten en forma desordenada, lo que indica que los cálculos, la historia del yacimiento, o ambas cosas, están errados.

Si los puntos graficados presenta una línea recta, Curva D, es porque las constantes  $r_{ep}$ ,  $C_v$  y  $N$  o  $G$  son correctas. Los mejores valores de  $C_v$  y  $N$  o  $G$ , pueden obtenerse por mínimos cuadrados y también del mismo gráfico (pendiente =  $C_v$ ; intercepto =  $N$  o  $G$ ) para los valores de  $At_D$  y  $r_{ep}$  correspondientes. Si los puntos presentan curvatura hacia



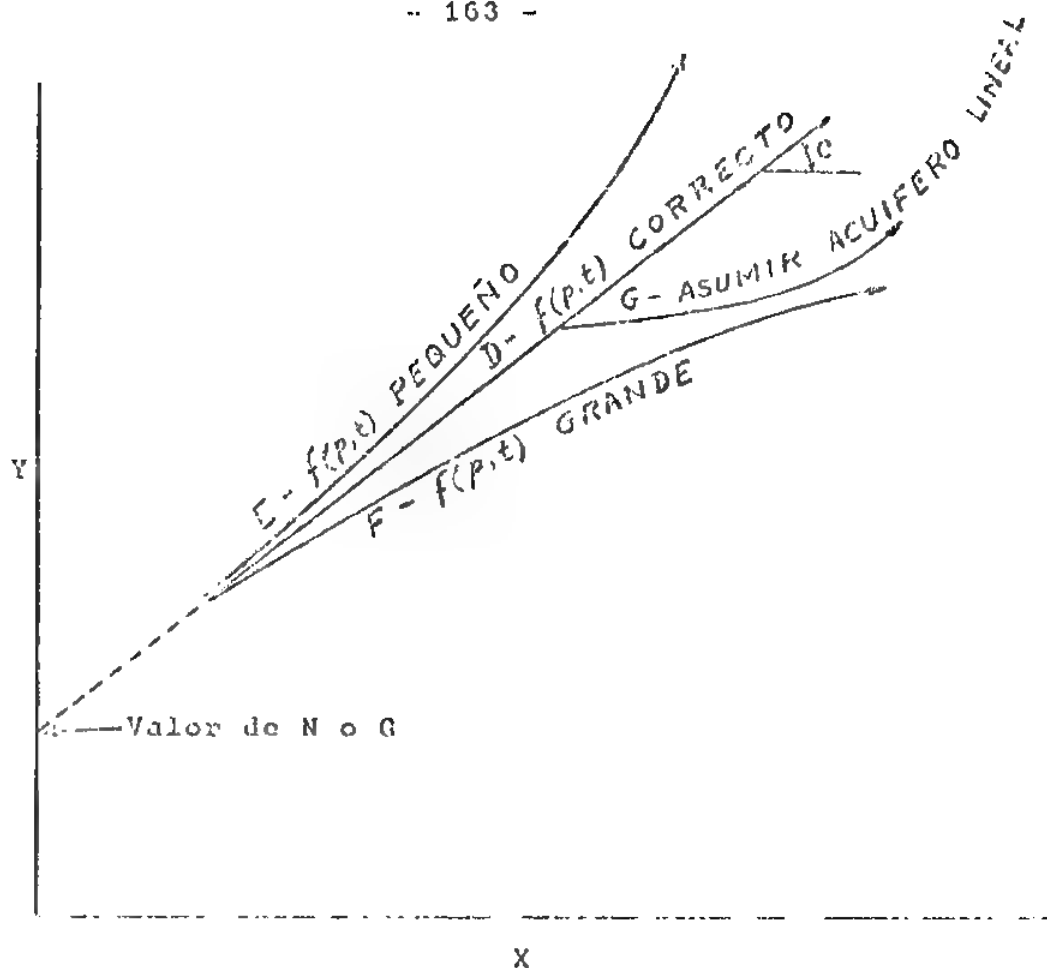


Fig. 58 - Curvas típicas de  $Y$  como función de  $X$  para diferentes valores de la sumatoria  $t(p,t)$  en el análisis de intrusión de agua con flujo no-continuo.

arriba, Curva E, o hacia abajo, Curva F, indica que el valor de  $f(p,t)$  es muy pequeño o muy grande respectivamente. Esto a su vez, indica que el valor de  $r_{ep}$ ,  $At_p$ , o ambos, son bajos o altos. Por tanto, deben aumentarse o disminuirse según el caso y repetir los cálculos con estos nuevos valores y así sucesivamente hasta obtener la mejor línea recta. De nuevo,  $C$ , y  $N$  o  $G$  se calculan por mínimos cuadrados y se verifican del gráfico para los valores de  $At_p$  y  $r_{ep}$  correspondientes. Finalmente, si los puntos presentan una curvatura en forma de S, Curva G, indica que el acuífero puede representarse mejor por un sistema lineal.

Con el fin de saber el sentido de variación de los valores de  $At_D$  y  $r_{eD}$  en caso de obtener curvatura hacia abajo o hacia arriba, Fig. 58, debe tenerse presente la forma de las curvas de  $Q(t_D)$  contra  $t_D$ , Figs. 35 a 46 (acuíferos cerrados). Por ejemplo, si se fija  $r_{eD}$  y se va ría  $At_D$ , debe observarse que para que intervalo de valores de  $t_D$  ocurre el máximo de variación de  $Q(t_D)$  con el fin de aumentar o disminuir  $f(p, t)$  de acuerdo a la curvatura. Por ejemplo, para  $r_{eD} = 15$ , Fig. 39, la máxima rata de aumento de  $Q(t_D)$  ocurre para  $100 \leq t_D \leq 500$ ,  $Q(t_D)$  contra  $t_D$  se va haciendo mas y mas horizontal hasta alcanzar un valor constante (flujo continuo) de 112,0 para  $t_D \sim 1000,0$ . Si para el  $At_D$  considerado, los  $t_D$  calculados caen en su mayoría por encima de 500, ocurre un aumen to muy pequeño de  $f(p, t)$  y entonces  $At_D$  debe disminuirse. Lo contrario debe hacerse si la mayoría de los  $t_D$  fueron menores de 100, es decir,  $At_D$  debe aumentarse. En resumen, una vez fijo  $r_{eD}$ , debe examinarse muy cuidadosamente la curva de  $Q(t_D)$  contra  $t_D$  correspondiente, con el fin de determinar si  $At_D$  debe aumentarse o disminuirse para obtener linealidad en el gráfico de Y contra X.

La curvatura tambien puede corregirse fijando el valor de  $At_D$  y variando  $r_{eD}$ . Si se aumenta este valor, equivale a aumentar mas rápidamente el valor de  $Q(t_D)$  - y por consiguiente el valor de  $f(p, t)$  - a tiempos mayores que a tiempos menores, trayendo como consecuencia la co rrección de la curvatura que se presenta hacia arriba. Si se disminuye  $r_{eD}$ , ocurre lo contrario.

De la discusión anterior puede concluirse que varias combinaciones de  $At_D$  y  $r_{eD}$  pueden proporcionar una línea recta y presentar la solución correcta. En estos casos, para determinar los mejores valores de  $At_D$  y  $r_{eD}$  debe hacerse uso de pruebas estadísticas: "prueba de consis

tencia", explicada mas adelante, e "intervalo de confianza"<sup>43</sup>.

En algunos yacimientos, el gráfico de  $\sigma$  como función de  $At_D$  (o  $\log(At_D)$ ) no presenta un mínimo definido, sino un intervalo de  $At_D$  donde el valor de  $\sigma$  varía relativamente poco. Esto se debe a que el yacimiento es insensitivo a cambios de  $At_D$  y en este caso, la obtención de este valor es solo de interés académico. Sin embargo, en algunos casos se recomienda la "prueba de consistencia"<sup>43</sup>; se toman varios valores de  $At_D$  alrededor del punto de  $\sigma$  mínimo; para cada  $At_D$  se grafica  $C_v$  y  $N$  o  $G$  como función de tiempo real y a cada gráfico, por mínimos cuadrados se determina la mejor línea recta y su pendiente. Estas pendientes se grafican como función de  $At_D$  en papel normal. La intersección de las curvas resultantes, corresponde al valor más probable de  $At_D$ . Teóricamente, debe ocurrir la intersección para una pendiente igual a cero, ya que si los valores de  $r_{eD}$  y  $At_D$  son correctos,  $C_v$  y  $N$  o  $G$  no deben variar con tiempo y la pendiente debe ser igual a cero.

En el análisis de intrusión de agua, el valor de  $m$  es cero, se asume o se conoce con razonable exactitud. Havlena y Odeh<sup>40</sup>, discuten el caso en que el valor de  $m$  sea una nueva incógnita y describen la forma de resolver el problema. Al mismo tiempo hacen énfasis en que este caso requiere datos de extraordinaria exactitud, principalmente datos de presión. Además, el método requiere conocer derivadas respecto a presión de determinados factores, lo que contribuye aún mas a disponer de datos de extrema exactitud. Por ejemplo, se requiere la derivada respecto a presión de  $(B_t - B_{ti})$ ,  $(B_g - B_{gi})$ , etc. Esto hace que en la práctica este método tenga muy poco uso.

Método de McEwen<sup>41</sup>. - El método de van Everdingen, Timmerman y McMahon - método VTM - discutido anteriormente, no trabaja cuando existe error

en los datos de presión, aún en el caso en que tal error sea pequeño. MaEwen modifica el método de VTM, proporcionando resultados satisfactorios, incluyendo el caso en que los datos de presión presentan dudas respecto a su exactitud.

En este método la ecuación de balance de materiales se arregla en tal forma de obtener la ecuación de una línea recta que parte del origen,  $Y = aX$ .

Si la Ec.(132), para yacimientos de petróleo saturado, se multiplica por  $D/N$ , el término  $W_o$  se pasa al lado izquierdo, se reemplaza por la Ec.(134) y además se define,

$$Y = D + \frac{C}{N} f(p, t) \quad (152)$$

$$X = N_p [B_t + (R_p - R_{si}) B_g] + W_p - W_i - G_i B_{ig} \quad (153)$$

$$a = \frac{1}{N} \quad (154)$$

puede escribirse,

$$Y = aX \quad (155)$$

Para yacimiento de petróleo no-saturados, las Ecs.(137) y (138) pueden arreglarse en forma similar y expresarse en la forma de la Ec.(155). En este caso,

$$Y = (B_o - B_{oi}) + \frac{C}{N} f(p, t) \quad (156)$$

$$Y = B_{oi} c_e(p_i - p) + \frac{C}{N} f(p, t) \quad (157)$$

$$X = N_p B_o + W_p - W_i \quad (158)$$

$$a = \frac{1}{N} \text{ (igual a Ec.(154)).}$$

Finalmente, en forma similar, para yacimientos de gas, la Ec.(141) también puede expresarse en la forma de la Ec.(155) En este caso,

$$Y = \left[ \frac{B_g}{B_{gi}} - 1 \right] + \frac{C}{G} f(p,t) \quad (159)$$

$$Y = C_p B_g + W_p - W_i \quad (160)$$

$$a = \frac{1}{G} \quad (161)$$

Como puede observarse de las ecuaciones anteriores el valor de Y contiene los términos con posibilidad de error mayor, especialmente si el error ocurre en la presión, ya que todos sus términos, excepto C/N o C/G y m (en caso de que exista capa de gas inicial) son funciones de este valor. Además contiene términos que son diferencias en factores volumétricos, muy sencibles a presión. Por otro lado, X contiene términos de producción (e inyección en caso de que exista), generalmente conocidos con mayor exactitud.

El valor de C/N para el caso de flujo no-continuo, puede calcularse aproximadamente si se conocen los valores de compresibilidad, saturación de agua connata y factor volumétrico inicial del petróleo. Reemplazando a C<sub>v</sub> de su definición, Ecs(123) y (124) y a N de la Ec. (96):

$$\frac{C}{N} = \frac{2c_c B_{oi} \theta^o}{360 (1-S_w)} \quad (162)$$

Acuíferos Lineales,

$$\frac{C}{N} = \frac{c_a B_{oi}}{(1-S_w)} \quad (163)$$

Para yacimientos de gas pueden deducirse ecuaciones similares para C/G. Basta cambiar  $B_{oi}$  por  $B_{gi}$ .

El procedimiento de cálculo puede resumirse en los siguientes pasos:

(1)-Se calcula el valor de C/N o C/G de una de las ecuaciones anteriores. Si se dispone de datos suficientes, se calcula aproximadamente un valor de la constante  $At_D$  por la Ec.(126) o (127); de lo contrario debe asumirse. El valor de  $r_{op}$  se conoce o se asume. Con los valores de C/N o C/G y  $At_D$ , para un determinado  $r_{op}$ , se calculan una serie de valores de Y y X de la historia del yacimiento (un valor para cada tiempo), usando las Ecs.(162) y (163), Ecs.(156) y (157) o Ecs.(159) y (160), de acuerdo al tipo de yacimientos. Aplicando mínimos cuadrados, se calcula el valor de a,

$$a = \frac{1}{N} \text{ o } \frac{1}{G} = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j Y_j)}{\sum_{j=1}^n (X_j)^2} \quad (164)$$

(2)-Con el valor de a obtenido del paso anterior y para cada valor de X se calcula un valor de  $Y_c$ , de la ecuación  $Y = aX$ . Con estos valores y los valores de  $r_{op}$  dados en el paso anterior, se cal-

cula la "Suma Normalizada" del cuadrado de las diferencias de los valores de  $Y$ , dada por,

$$SSD_n = \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - Y_{cj})^2}{Y_{\max}^2} \quad (165)$$

donde  $Y_{\max}$  es el valor máximo de  $Y$  calculado en el paso anterior.

(3)-Se asumen otros valores de  $At_D$  (valores mayores y menores del valor calculado aproximadamente) y se repiten los Pasos 1) y 2). Se grafica  $SSD_n$  y  $\frac{1}{a}$  (  $N$  o  $G$  ) como función de  $At_D$ . Donde ocurra el mínimo en el valor de  $SSD_n$  se leen los mejores valores de  $At_D$  y  $N$  o  $G$  para el  $r_{eD}$  considerado.

(4)-Si  $r_{eD}$  es desconocido, se asumen diferentes valores de  $r_{eD}$  y se repiten los Pasos 1) a 3). La curva que presenta el  $SSD_n$  mínimo en este punto se toma el mejor valor de  $At_D$ ,  $N$  o  $G$  y el  $r_{eD}$  correspondiente.

(5)-Se calcula el mejor valor de  $C$ , a partir del mejor valor de  $N$  o  $G$  obtenido y del valor de  $C/N$  calculado en el Paso 1).

Como puede observarse el cambio primordial en este método respecto al método VTM consiste en que limita el análisis por mínimos cuadrados a la determinación de  $N$  o  $G$ ,  $At_D$  y  $r_{eD}$ . La constante  $C$  se toma luego proporcional a  $N$  o  $G$  ya que  $C/N$  o  $C/G$  se calcula independientemente. Por tanto, la exactitud de los resultados, dependerá del conocimiento exacto de los factores volumétricos iniciales,  $B_{oi}$ , o  $B_{gi}$ , de la compresibilidad del agua y de la saturación de agua en la zona de petróleo. Además, en el caso de movimiento radiales, entra en cuenta de

6, o ángulo de la circunferencia sobre la cual actúa el acuífero.

Método de Stanley<sup>42</sup> . - Este método, como los anteriores, permite calcular el petróleo o gas originalmente en el yacimiento y la constante de intrusión, a través de un proceso de ensayo y error (tanteo). Utiliza las mismas ecuaciones de VTM, pero en este caso el término de intrusión,  $W_e$ , se expresa por la ecuación,

$$W_e = C \sum_{j=1}^n \Delta p_j (n+1-j)^m \quad (166)$$

El valor  $Q[(t_n - t_j - 1)\Delta t]$  de la Ec.(122) se ha reemplazado por  $(n+1-j)^m$ , donde  $j$  es un número entero que varía entre 1 y  $n$  (número de periodos considerados en la historia del yacimiento);  $m$  es un exponente que varía entre 0,5 y 0,8. El valor de  $C$ , es igual a la de la Ec.(122), multiplicada por la constante  $(\Delta t_D \Delta t)^m$ , donde  $\Delta t_D$  es la constante de conversión de tiempo dimensional a tiempo adimensional y  $\Delta t$  es el valor del intervalo en que se ha dividido el tiempo de la historia del yacimiento. El método asume que el tiempo se divide en periodos de igual duración.

Como se discutió anteriormente,  $Q(t_D)$  es función de  $t_D$ . Stanley consideró,

$$Q(t_D) = t_D^m \quad (167)$$

Pero,  $t_D = (\Delta t_D)(t)$  y a su vez,  $t = (i)(\Delta t)$ , luego,

$$Q(t_D) = (\Delta t_D \Delta t)^m (i)^m \quad (167a)$$

$$Q(t_D) = (\text{constante})(i)^m \quad (167b)$$



donde  $i$  = número de períodos. La constante  $= (\Delta t_D \Delta t)^m$  se ha incluido junto con el valor de  $C$  de la Ec.(122). Por tanto, al determinar el valor de  $C$  de la Ec(166) debe tenerse en cuenta esta constante.

La historia del yacimiento se divide en períodos de igual duración 1, 2, ...  $j$  ...  $n$ . Al aplicar el principio de superposición para el cálculo de  $W_e$ , se toma el  $Ap_1$  y el  $Q(t_D)$  máximo, el  $Ap_2$  y el  $Q(t_D)$  que sigue en orden descendente, etc. Por tanto, el  $Ap_1$  se tomará con  $(n)^m$ , el  $Ap_2$  con el  $(n-1)^m$ , etc. Por esta razón, en la Ec.(166) aparece el término  $(n+1-j)$  en lugar de  $i$  de la Ec.(167b).

En forma similar a los casos anteriores,

$$f(p,t) = \sum_{j=1}^n Ap_j (n+1-j)^m \quad (168)$$

$$W_o = C f(p,t) \quad (134)$$

Stanley usa el mismo arreglo de las ecuaciones de balance de materiales de VTM en línea recta deducido anteriormente, Ecs.(136) y (144) y de acuerdo al tipo de yacimiento considerado: yacimientos de petróleo no saturados y saturados y yacimiento de gas,

$$Y = CX + N \quad (136)$$

$$Y = CX + G \quad (144)$$

Los valores de  $Y$  tienen la misma definición de las Ecs.(133), (139) y (142) y  $X$  la misma definición de las Ecs.(136), (140) y (143) pero teniendo en cuenta que para  $f(p,t)$  se usa la nueva definición, Ec.(168).

El procedimiento de cálculo puede resumirse en los siguientes pasos:

(1)-Se divide la historia del yacimiento en un número,  $n$ , adecuado de iguales incrementos de tiempo y se numeran ascendente, 1, 2, 3, ... j ... n.

(2)-Se calculan las caídas de presión de acuerdo a la Ec. (125).

(3)-Se calcula  $f(p,t)$  de acuerdo a la Ec.(168) para  $m = 0,5$  y  $m = 0,8$ .

(4)-Se Calcula Y y X para cada período.

(5) Se asumen valores de N o G. Para cada N o G asumido se calculan una series de valores de C (uno para cada período), tanto para  $m = 0,5$  como  $m = 0,8$ .

(6)-Se gráfica C como función de tiempo; una curva para cada N o G asumido y para cada  $m = 0,5$  y  $0,8$ . De estos gráficos puede deducirse si el valor de N o G verdadero está comprendido entre los valores asumidos, observando si ocurre cambio de inflexión de las curvas, es decir, cambio de curvatura hacia arriba a curvatura hacia abajo, a medida que N o G aumentan. En caso de que se tenga previamente un estimado de N o G y además se conozca que el acuífero es infinito, este paso puede eliminarse, pues estamos seguros que en el intervalo de valores asumidos de N o G está correcto.

(7)-Para cada N o G asumido se calcula el promedio aritmético de C, denominado  $C_p$ , y se calcula la desviación normal correspondiente

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (C_p - C_j)^2} \quad (169)$$

Se gráfica  $\sigma$  como función de  $N$  o  $G$  tanto para  $m = 0,5$  como  $m = 0,8$  y donde ocurra el mínimo de desviación normal allí se toma el mejor valor de  $N$  o  $G$  y  $m$ . El mejor valor de  $C$ , será el  $C_p$  calculado para los mejores valores de  $N$  o  $G$  y  $m$  obtenidos.

Debe tenerse presente en el Paso 5) que los valores de  $C$  calculados al comienzo de la historia del yacimiento pueden ser muy diferentes de los calculados para el resto de la historia. Este comportamiento puede deberse a que al comienzo de la historia, la intrusión no siga exactamente la Ec.(166) o porque la presión no sea exactamente la que ocurre en el contacto agua-petróleo, etc. En tales casos se recomienda no tomar estos valores de  $C$  para el cálculo de  $C_p$ .

Una vez obtenidos los mejores valores de  $N$  o  $G$  y  $C_p$ , se pueden usar en la predicción en la forma conocida.

El procedimiento anterior se aplica a acuíferos infinitos. Para acuíferos finitos se usa la misma técnica pero al graficar en el Paso 6), se observará, que cuando el límite del acuífero llega a ser efectivo,  $C$  comenzará a disminuir a una rata constante, no importa el valor de  $N$  o  $G$  asumido. En este caso, el valor de  $N$  o  $G$  se obtendrá del Paso 6), analizando las diferentes curvas y seleccionando la de menor variación de  $C$  con tiempo. Además, para la predicción es necesario obtener una ecuación de  $C$  con tiempo. En vista de lo anterior, el método es más recomendado, cuando se trate de acuíferos infinitos. Tiene la ventaja de ser un método sencillo y puede trabajarse fácilmente con calculadora de escritorio.

#### Eficiencia de Desplazamiento.-

Los métodos de análisis de la historia del yacimiento discuten

tidos en las secciones anteriores, son métodos relativamente simplificados, pues no toman en consideración la reducción (disminución) de la zona de petróleo, debido a la intrusión (invasión) de agua y a la expansión de la capa de gas, en caso de que éste exista. Un análisis más completo debe considerar estos factores.

Eficiencia de desplazamiento es una medida de la cantidad de petróleo que el agua de intrusión desplaza de la zona de petróleo y en caso de existir capa de gas inicial y cuyo comportamiento sea de expansión, es una medida de la cantidad de petróleo desplazado al expandirse tal capa de gas dentro de la zona de petróleo. Tales eficiencias se definen,

- 1) Eficiencias de desplazamiento en la zona de intrusión de agua,

$$E_{Dig} = \frac{\text{Intrusión neta de agua}}{\left[ \text{Volumen de petróleo de la zona de petróleo} \right] \text{invasión por agua}} \quad (170)$$

- 2) Eficiencia de desplazamiento en la zona de expansión de la capa de gas,

$$E_{Dig} = \frac{\text{Expansión total de la capa de gas}}{\left[ \text{Volumen de petróleo de la zona de petróleo} \right] \text{invasión por gas}} \quad (171)$$

La intrusión neta de agua es simplemente la intrusión total menos el agua producida,  $(W_e - W_p)$ . El término  $W_e$  debe determinarse con tiempo según se ha discutido y  $W_p$  es dato de producción. La expansión total de la capa de gas está dada por  $(G_{Bgi} - G_{pc})B_g - G$ , o sea que debe conocerse el gas originalmente en la capa de gas y el gas producido  $G_{pg}$ , de esta capa. Ambos términos asumen que el petróleo que queda en

las zonas invadidas no sufren cambios (merma), ni ocurre liberación de gas de tal petróleo. Si esto último ocurre, tal gas liberado debe aumentarse a la intrusión neta o a la expansión de la capa de gas, y los términos anteriores habría que modificarlos, dividiéndolos por el factor  $[1 - S_{or}(R_{si} - R_s) B_g/B_o(1 - S_{or})]$ , donde  $S_{or}$  es la saturación residual de petróleo en tales zonas de intrusión o expansión. Además se considera que todo el petróleo ha quedado atrapado en estas zonas a la presión inicial, de lo contrario es necesario modificar el valor de  $R_{si}$ .

Los volúmenes de petróleo de las zonas de petróleo invadidas por agua y gas, pueden a menudo obtenerse del comportamiento del campo, si se logra conocer el volumen del yacimiento invadido por agua o gas de la capa de gas. Conociendo la saturación inicial de petróleo, se determina el volumen de petróleo en tales zonas.

Los volúmenes de yacimiento (formación productora) invadidos por agua o gas, pueden determinarse por el movimiento de los contactos agua-petróleo y gas-petróleo. La posiciones de estos contactos pueden estimarse de pozos o por registros. Si los contactos no se mueven uniformemente, el volumen invadido debe determinarse en cada pozo y luego por mapas isopacos, determinar los volúmenes invadidos. Las eficiencias de desplazamiento de la historia, pueden usarse para predicciones, siempre y cuando las condiciones futuras de operación permanezcan relativamente iguales.

Si las eficiencias del comportamiento no pueden determinarse del comportamiento del campo, existen otras técnicas que pueden usarse, entre las cuales la más común es la de Welge<sup>44</sup>. El método de análisis y predicción de Woody y Moscrip<sup>45</sup> también incluye el cálculo de eficiencias de desplazamiento.

Weigé<sup>44,46</sup> basa su método en las ecuaciones de desplazamiento de Buckley y Leverett<sup>47</sup>, para lo cual, entre otras cosas, se requiere conocer las curvas de permeabilidad relativa. La ecuación de flujo fraccional, para una fase desplazante d y petróleo, despreciando el término de capilaridad, puede escribirse,

$$f_d = \frac{1}{1 + \frac{k_o \mu_d}{k_d \mu_o}} \left( 1 - \frac{(0,488)(10^{-3}) A k k_{ro} \Delta \rho \text{ sen } \alpha}{\mu_o q_t} \right) \quad (172)$$

donde d se refiere a la fase desplazante que puede ser agua o gas. El término  $\Delta \rho$  es la diferencia en densidades: para petróleo y agua,  $\Delta \rho = (\rho_w - \rho_o)$  y para petróleo y gas,  $\Delta \rho = (\rho_o - \rho_g)$ . La Fig.59 presenta una curva típica de  $f_d$  como función de  $S_d$  ( $S_w$  o  $S_g$ ) y la curva de distribución de saturación correspondiente. El valor de  $S_{di}$  corresponde en el caso de intrusión de agua, a la saturación de agua existente en la zona de petróleo antes de comenzar la intrusión y en el caso de expansión de la capa de gas, a la saturación de gas existente en la zona de petróleo antes de comenzar la expansión. Este valor es generalmente cero o muy cerca de cero y en tal caso la curva de flujo fraccional parte de cero. La tangente a la curva de  $f_g$ , a partir de  $S_{di}$ , determina la saturación  $S_{dx}$  en el frente de intrusión (invasión) o expansión y la saturación promedio en dichas zonas,  $S_{dp}$ , tal como indica la Fig.59. De estos datos, puede determinarse la eficiencia de desplazamiento. Además se determina el valor de saturación máxima de la fase desplazante,  $S_{dmax}$ , y por consiguiente la saturación irreducible de petróleo,  $S_{or}$ .

El término que incluye  $\Delta \rho$ , denominado término de gravedad, muestra otros factores, además de la razón de permeabilidades relati-

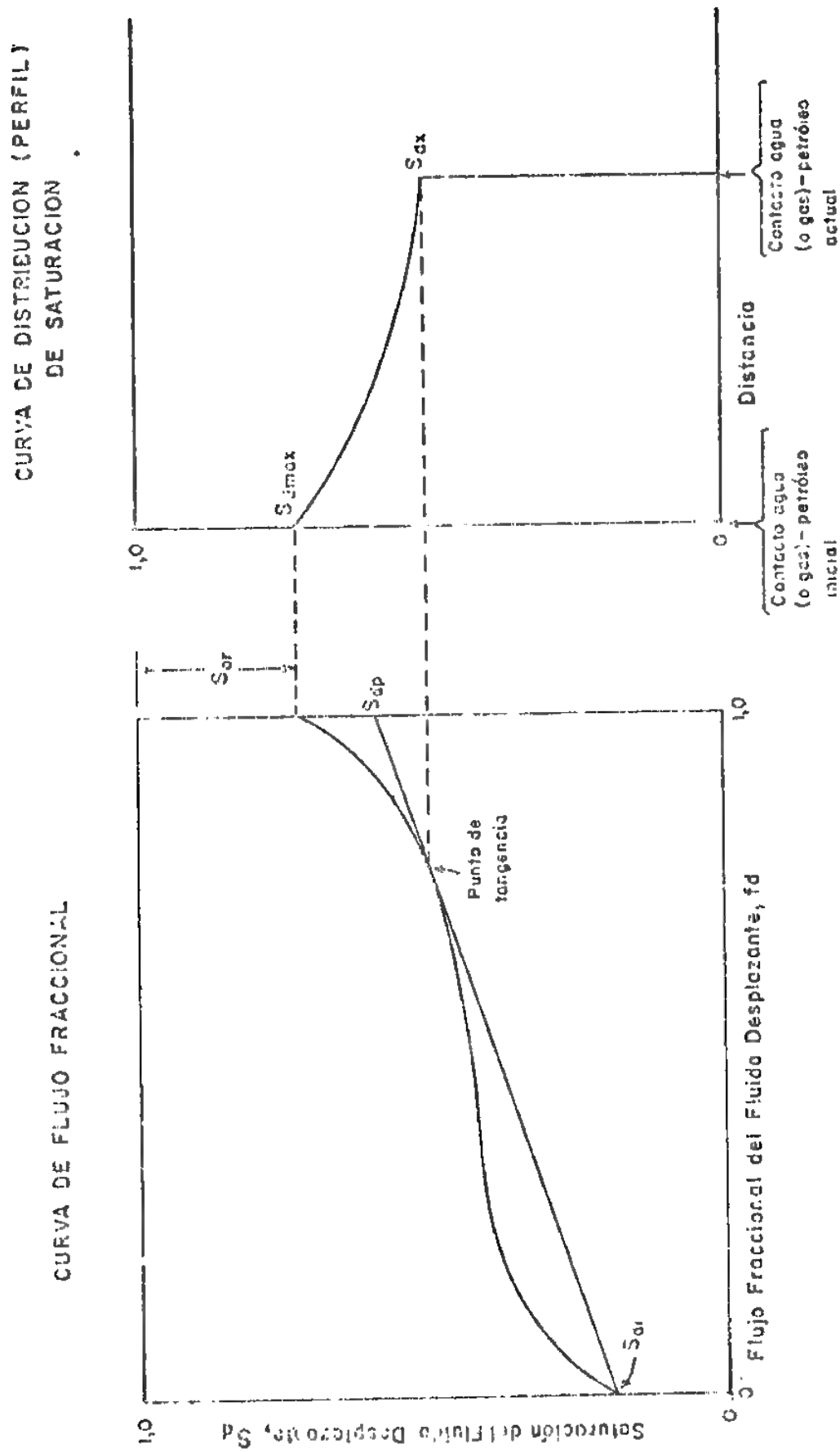


Fig. 59 — Curvas típicas de flujo fraccional y distribución de saturación para determinar eficiencias de desplazamiento por el método de Welge.

vas,  $k_o/k_d$  y de la razón de viscosidades,  $\mu_d/\mu_o$ , que influyen en la curva de  $f_d$  contra  $S_d$  y por consiguiente en la eficiencia de desplazamiento. Tales factores son:  $A$ ,  $k$ ,  $\mu_o$ ,  $\Delta\rho$ ,  $c$  y  $q_t$ . Cada uno de estos factores, puede, teóricamente, estudiarse por separado y verse como influyen en la eficiencia de desplazamiento. Por ejemplo, un aumento en la rata de producción, aumentará las fracciones de flujo de agua o gas para una saturación dada. Esto, por supuesto, disminuye la eficiencia de desplazamiento.

Sin embargo, ya se discutió respecto a los factores que deben tenerse en cuenta en la rata de producción para una recuperación máxima. Entre otros, la permeabilidad de la formación,  $k$ , y la viscosidad del petróleo, son factores muy influyentes.

Woody y Moscrip<sup>45</sup>, combinan las ecuaciones de balance de materiales, de intrusión de agua y de desplazamiento (Buckley y Leverett) y las resuelven simultáneamente. El petróleo originalmente en el yacimiento lo consideran conocido. Determinan a diferentes tiempos de la historia del yacimiento, la constante de intrusión de agua y las posiciones de los contactos agua-petróleo y gas-petróleo, lo mismo que las distribuciones de saturación en las zonas de intrusión y expansión. Con estos datos, obtienen las eficiencias de desplazamiento a estos mismos tiempos. Además el método permite estudiar la variación de la rata de producción con el fin de determinar la rata de producción para máxima eficiencia. Los cálculos son bastante laboriosos e incluyen un proceso de ensayo y error (tanteo), por tanto, deben efectuarse a través de una computadora.

El método de Woody y Moscrip también puede usarse para predecir el yacimiento. En este sentido, los cálculos exigen conocer la pre-



sión y la rata de producción para cada período futuro en se desee la predicción. Esto introduce en el método una serie de cálculos de ensayo y error: se asume la presión y la rata de producción, se hacen los cálculos y se compara con los valores estimados. Si los dos no verifican satisfactoriamente, deben revisarse los estimados y repetir los cálculos hasta obtener una solución satisfactoria. Así se continúa para cada tiempo futuro.

Rachford y otros<sup>48</sup>, presentan un método numérico que permite también calcular el movimiento de los contactos agua-petróleo y gas-petróleo con tiempo a partir de la historia de presión y producción. El método también permite predecir, asumiendo valores de las razones gas-petróleo y agua-petróleo.

#### \* PREDICCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO.

El término, predicción de yacimientos con empuje hidráulico puede tener varios significados de lo que se desee predecir: presión, rata de intrusión, intrusión total, etc. Por tanto, es más correcto, en forma similar al caso de yacimientos con empuje por gas en solución, hablar de predicción del comportamiento de yacimientos con empuje hidráulico, lo que combina predicción de presión, intrusión de agua, razón gas-petróleo y agua-petróleo, etc.

El método y la exactitud de una predicción del comportamiento de un yacimiento con empuje hidráulico, depende del método con que se haya analizado la historia del yacimiento y de las suposiciones hechas para la predicción. Por ejemplo, las mismas ecuaciones que Wood y Moscrip usan para el análisis de la historia, se usan para la predicción tal como se mencionó anteriormente.

En esta sección se presenta un método de predicción del comportamiento de yacimientos con empuje hidráulico, en base a que la intrusión de agua, pueda expresarse por una de las fórmulas vistas anteriormente. Este método de predicción es un método de iteración (repetición de cálculos) o ensayo y error (tanteo) y en este sentido se asemeja a algunos de los métodos de predicción de yacimientos de empuje por gas en solución. Además, en un empuje hidráulico, el tiempo es un factor en cada punto de la predicción. El método asume conocida la rata de producción de petróleo o permite determinarse de la historia del yacimiento. Igualmente, asume conocida la producción de agua, expresada generalmente por la razón agua-petróleo, RAP.

La rata de producción de petróleo puede estimarse a partir del índice de productividad,  $J$ ,

$$Q_o = J(p_e - p_{wf}) \quad (173)$$

donde  $J$  puede ser el índice de productividad para cada pozo o del campo en general. En este último caso,  $Q_o$  será la rata de producción total del campo y en el primer caso, la rata total de producción, será la suma de las ratas de producción individuales de los pozos. Además en este caso, el valor de  $p_e$  es aproximadamente igual a la presión del yacimiento, valor asumido en la predicción. El valor de  $p_{wf}$  es la presión fluyente de cada pozo. El valor de  $J$  puede expresarse por,

$$J = \frac{0,00708 \ k \ k_{ro} \ h}{\mu_o \ B_o \ \ln(r_e/r_w)} \quad (174)$$

El grupo de términos  $kh/\ln(r_e/r_w)$  puede evaluarse de la prueba inicial de productividad del pozo. En ese momento  $k_{ro}$  es muy cercano a la uni-

dad y  $\mu_0$  y  $B_0$  se evalúan a la presión inicial. En esta forma podría obtenerse en índice de productividad inicial,  $J_i$ . El índice de productividad permanece prácticamente constante para presiones de producción por encima del punto de burbujeo. A medida que la presión disminuye se forma saturación de gas en la zona de petróleo,  $k_{ro}$  y  $B_0$  disminuyen y  $\mu_0$  aumenta. Muchas veces, el cambio principal en el  $J$  puede ocurrir debido a la reducción de  $h$  a medida que el agua, gas, o ambos invaden el intervalo productor.

La predicción de ratas de producción de pozos parcialmente invadidos por agua es difícil, ya que  $k_{ro}$  no se conoce. En la práctica, se produce muy poco petróleo una vez que ocurra la ruptura. Además es recomendado reparar los pozos para prevenir producción excesiva de agua. A veces para predecir las ratas de producción de petróleo en pozos de alta producción de agua, se hace uso de las curvas de declinación

Los siguientes pasos resumen el procedimiento de predicción para el caso de un empuje hidráulico donde no existe capa de gas inicial. En caso que exista, bastará modificar las ecuaciones correspondientes, por el factor  $m$ . Además, tampoco existe ningún tipo de inyección:

(1) - Se selecciona un incremento (intervalo) de tiempo  $\Delta t$ , generalmente un mes, un trimestre, un semestre o un año. En esta forma se determina el tiempo a la que se van a efectuar los cálculos,

$$t_j = t_{j-1} + \Delta t \quad (1/2)$$

donde  $j$  es el número de la etapa.

(2) - Se fija una rata de producción promedio del yacimiento,

$Q_0$ , para el período considerado, de donde puede escribirse,

$$\Delta N_p = Q_0 \Delta t \quad (176)$$

$$N_{pj} = N_{pj-1} + \Delta N_p \quad (177)$$

(3) - Se asume una presión  $P_j$ . Esta será la variable de ensayo y error (tanteo) en los cálculos para la predicción.

(4) - Usando el tiempo  $t_j$  y la presión asumida  $p_j$ , se determina la intrusión de agua de acuerdo al tipo de intrusión considerado, Ecs.(105), (112) o (122),

$$W_{ej} = C[f(p,t)]_j \quad (178)$$

(5) Se calcula la saturación de petróleo en la zona de petróleo por la fórmula<sup>1</sup>,

$$S_{oj} = \frac{\left[ N - N_{pj} - \frac{(U_{ej} - W_{pj})(1 - \bar{S}_{wf} - \bar{S}_{gf})}{(\bar{S}_{wf} - S_{wi})B_{oj}} \right] B_{oj}}{\frac{NB_{oi}}{(1 - S_{wi})} - \frac{(U_{ej} - W_{pj})}{(\bar{S}_{wf} - S_{wi})}} \quad (179)$$

Esta ecuación es la número (93) de la referencia 1. Asume que no existe capa de gas inicial, o si existe, ocurre difusión del gas en el petróleo y el contacto agua-petróleo no se mueve. En caso de existir capa de gas y segregación de la misma, se usa la Ec.(101) de la Referencia 1. En la ecuación anterior,  $\bar{S}_{wf}$  y  $\bar{S}_{gf}$  son las saturaciones de agua (incluye  $S_{wi}$ ) y saturación de gas en la zona invadida por el agua. Además,  $(1 - \bar{S}_{wf} - \bar{S}_{gf}) = \bar{S}_{of}$ , o sea saturación irreducible de petróleo en la zona invadida por agua. Estos valores de saturación deben

conocerse, bien sea de pruebas de laboratorio, de campo, método Welge, etc.

El valor de  $W_{pj}$  debe determinarse del comportamiento pasado (historia) y generalmente se expresa como la razón agua-petróleo,  $R_{AP}$ , o sea una fracción de  $\Delta N_p$ . El valor de  $W_{ej}$  es el calculado en el Paso (4). Los demás datos son función de presión ( $B_{oi}$ ,  $B_{oj}$ ) o constantes ( $S_{wi}, N$ ).

(6) - Con el valor de  $S_{oj}$  y las curvas de permeabilidad relativa en la zona de petróleo se determina la razón de permeabilidades relativas,  $(k_g/k_o)_j$ , de donde se determina la razón gas-petróleo instantánea a la presión  $p_j$ ,

$$R_j = \left[ \frac{k_g}{k_o} \right]_j \left[ \frac{\mu_o}{\mu_g} \frac{B_o}{B_g} \right]_j + R_{sj} \quad (130)$$

(7) - Se calcula el valor de la razón gas-petróleo acumulada,  $R_p$ , a la presión  $p_j$ ,

$$R_{pj} = \frac{(R_{pj-1})(N_{pj-1}) + \left[ \frac{R_{pj-1} + R_{pj}}{2} \right] \Delta N_{pj}}{N_{pj}} \quad (181)$$

donde,  $\Delta N_{pj} = N_{pj} - N_{pj-1}$

(8) - Se calcula la intrusión de agua,  $W_{ej}$ , usando la ecuación de balance de materiales,

$$W_{ej} = N_{pj} [B_{tj} + (R_p - R_{si}) B_g] - (B_{ti} - B_{ti}) + W_{pj} \quad (182)$$

(9) - Se compara el valor de  $W_e$  del Paso (8) con el valor de

$W_e$  del Paso (4). Si coinciden dentro de una aproximación normal, la presión asumida  $p_j$  es la correcta y se continua la predicción para el tiempo  $j+1$ . Si son muy diferentes es necesario asumir una nueva presión y repetir los cálculos hasta obtener valores satisfactorios. Obsérvese que  $N_{pj}$  y  $t_j$  permanecen constantes y solamente varía la presión. Un aumento en presión, aumenta la intrusión total de agua por la fórmula,  $W_e = C_f(p, t)$  y la disminuye al calcularse por la ecuación de balance de materiales. Por tanto:

- a) Si  $W_e$  (Paso 3)  $>$   $W_e$  (Paso 4), se disminuye la presión
- b) Si  $W_e$  (Paso 3)  $<$   $W_e$  (Paso 4), se aumenta la presión

La predicción hasta este paso, permitiría obtener  $p$ ,  $W_e$ ,  $N_p$ , como función de tiempo. La predicción puede hacerse más completa, si en el análisis de la historia se ha determinado el avance de agua-petróleo dentro de la zona de petróleo y la eficiencia de desplazamiento. Además, también puede verificarse si la rata de producción usada en cada intervalo es la correcta, siempre y cuando de la historia se haya determinado una relación entre producción y volumen de la zona de petróleo invadido. En esta forma puede agregarse los siguientes pasos en la predicción:

(10) - Se determina el volumen de petróleo de la zona de petróleo invadido por agua o gas, conociendo la eficiencia de desplazamiento en estas zonas y la intrusión neta de agua y expansión total de la capa de gas, Ecs.(170) y (171). De este valor se determinan el volumen poroso invadido y pueden localizarse los contactos agua-petróleo y gas-petróleo.

(11) - Si se ha obtenido una relación entre la producción y el

volumen de la formación invadida se verifica si el volumen invadido calculado en el Paso (10), está dentro de una aproximación normal ( $\pm 10$  por ciento, puede considerarse satisfactorio). Si ocurre una diferencia muy grande, se toma otra rata de producción y se repiten los cálculos hasta obtener verificación aceptable.

También podría considerarse el caso de un mantenimiento de la presión en un valor  $p$ . En este caso, podría estimarse la cantidad de fluido que es necesario inyectar en la siguiente forma:

- (1) - Igual al Paso 1) del procedimiento anterior.
- (2) - Igual al Paso 2) del procedimiento anterior.
- (3) - Se calcula  $W_e = C f(p,t)$  y luego el incremento en intrusión  $\Delta W_e = (W_{ej} - W_{ej-1})$ .
- (4) - Se calcula  $W_e$  por balance de materiales y el incremento de intrusión  $\Delta W_e = (W_{ej} - W_{ej-1})_{BM}$ .
- (5) - Se calcula la inyección neta al yacimiento durante el intervalo considerado,

$$\text{Inyección neta} = \Delta W_e \text{ (Paso 4)} - \Delta W_e \text{ (Paso 3)}$$

En esta forma se repiten los cálculos hasta el tiempo descaído, de acuerdo al agotamiento, invasión, etc. Debe tenerse en cuenta que si la intrusión sigue flujo no-continuo y el acuífero es limitado, el valor de  $\Delta W_e$  del Paso 3) llega un momento en que es cero, de acuerdo al valor de  $t_D$ .

#### PREDICCIÓN EN BASE A LA SOLUCIÓN DEL CASO DE RATA TERMINAL CONSTANTE.

Las soluciones de la ecuación de difusividad para el caso de rata terminal constante fueron dadas anteriormente. El teorema de su

perposición permite usar tales soluciones cuando la rata de intrusión cambia con tiempo en la forma indicada en la Fig.54. En forma general puede escribirse, Ecs.(79) y (84),

$$\Delta p = p_i - p_n = A \sum_{j=1}^n (e_j - e_{j-1}) \Delta p [(t_n - t_{j-1})_D] \quad (183)$$

donde A es una constante que depende del tipo de acuífero:

Acuíferos Lineales,

$$A = \frac{887,58 \mu L}{kbh} \quad (184)$$

Acuíferos Radiales,

$$A = \frac{141,2 \mu}{kh} \quad (185)$$

Además,  $e_0 = 0$  y  $t_0 = 0$ . Para acuíferos lineales,  $\Delta p = F_k$ . Esta solución puede emplearse en dos formas para la predicción:

- 1.- Predicción de presiones en el contacto agua-petróleo, para una rata de intrusión dada.
- 2.- Cálculo de ratas de intrusión, para una presión dada en el contacto agua-petróleo.

En cada uno de estos casos, de la historia (o predicción anterior) se conoce la presión como función de rata de intrusión, hasta el tiempo  $t_n$ , Ec.(183). Esta ecuación, para un tiempo  $n+1$ , se escribe,

$$p_i - p_{n+1} = A \sum_{j=1}^n (e_j - e_{j-1}) \Delta p [(t_{n+1} - t_{j-1})_D] + A(e_{n+1} - e_n) \Delta p [(t_{n+1} - t_n)_D] \quad (186)$$



Esta ecuación puede usarse para predecir los dos casos mencionados. Si se conoce  $e_{n+1}$  al tiempo  $t_{n+1}$ , se despeja  $p_{n+1}$  y si se conoce este valor se despeja  $e_{n+1}$ . En el siguiente paso,  $p_{n+1}$  y  $e_{n+1}$  serán conocidos, y pasan a ser  $p_n$  y  $e_n$ . Se hace de nuevo la predicción para el  $t_{n+1}$ , que en realidad será  $t_{n+2}$ . Se procede así sucesivamente. Los demás términos de la ecuación son conocidos. Ambos casos suponen conocida la constante A.

Si se conoce el valor del petróleo o gas originalmente en el yacimiento, de la ecuación de balance de materiales puede calcularse  $W_e$  a diferentes tiempos y de aquí calcular los valores de e. Luego, aplicando la ecuación anterior se calculan los valores de p y se comparan con los de la historia. Puede determinarse un valor de A que permite un chequeo aproximado de presiones. De la variación de e con tiempo, puede extrapolarse e y predecir p de la ecuación anterior. A veces, y particularmente en yacimientos que producen por encima del punto de burbujeo, la rata de producción de petróleo puede considerarse igual a la rata de intrusión. En este caso aún es más fácil hacer la predicción.

El mejor valor de A puede obtenerse fácilmente de la historia del yacimiento en la siguiente forma:

- 1.- De la historia del yacimiento se calcula  $\Delta p_j = (p_i - p_j)$ , denominados  $\Delta p_j$  observados,  $(\Delta p_j)_{obs}$ .
- 2.- Conociendo las ratas de intrusión, se calcula la sumatoria de la Ec.(183), una sumatoria para cada tiempo.
- 3.- Se calcula un primer valor de A, dividiendo la suma de todos los  $\Delta p_j$  observados por la sumatoria de todos los términos (sumatorias) calculados en el Paso 2).

4.- Se calculan valores  $\Delta p_j$  denominados  $\Delta p_j$  calculados,  $(\Delta p_j)_{cal}$  multiplicando el valor de A obtenido en el Paso 3) por cada una de las sumatorias del Paso 2)

5. - Se obtiene la desviación normal correspondiente,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(\Delta p_j)_{cal} - (\Delta p_j)_{obs}]^2} \quad (187)$$

6.- Se asumen otros valores de A y se repiten los Pasos 4) y 5). Finalmente, se gráfica  $\sigma$  contra A y donde ocurre el mínimo valor de  $\sigma$  allí se toma el mejor valor de A.

#### OTROS METODOS DE ANALISIS Y PREDICCION.

Además de los métodos estudiados anteriormente para el análisis y predicción de yacimientos con empuje hidráulico, otras técnicas han sido usadas para hacer este tipo de estudios. Se discutirá en esta sección los métodos de Hutchinson y Sikora<sup>49</sup> y de Funciones de Influencia<sup>33,34</sup> y brevemente las técnicas de Modelos Analógicos<sup>50 a 53</sup> (analizadores o computadores analógicos eléctricos) y Matemáticos. En particular, esta última técnica está desplazando casi totalmente el estudio en modelos analógicos, debido al desarrollo de computadores de mayor capacidad.

#### Método de Hutchinson y Sikora.

Este método permite analizar y predecir la historia de un yacimiento con empuje hidráulico de un modo general, sin necesidad de conocer la geometría y tamaño del acuífero. Es un método sencillo de análisis y permite hacer los cálculos manualmente por medio de una calculadora de escritorio.

El método exige el conocimiento del petróleo originalmente en el yacimiento y la historia normal del mismo: presión, datos de producción, PVT, etc. De la ecuación de balance de materiales, se calcula la intrusión de agua y luego la rata de intrusión. Con datos de presión y rata de intrusión se desarrolla una ecuación que relaciona estos términos a través del factor, denominado Función o Factor de Resistencia  $Z$ , el que incluye la geometría del acuífero, forma y distribución de flujo. La variación de este factor puede extrapolarse para predecir el yacimiento.

Las Ecs.(26a), (28a) y (29a) expresan la caída total de presión en el contacto agua-petróleo para una rata constante de intrusión en acuíferos lineales y las Ecs.(57) y (63) expresan igual cosa para acuíferos radiales. En general, tales ecuaciones pueden escribirse,

$$\Delta p = (p_i - p) = A e Z(t_D) \quad (188)$$

donde  $A$  es una constante que depende de la geometría del acuífero,  $e$ , es la rata de intrusión y  $Z(t_D)$  es una caída de presión adimensional, que puede hallarse en tablas en función de  $t_D$ , según se discutió anteriormente. Si se gráficara  $\Delta p$  como función de  $t$ , para una rata de intrusión constante,  $e$ , se obtendrían las formas de las curvas 1 y 2 de la Fig.60, para acuíferos infinitos y finitos respectivamente. Al comienzo, la presión caerá rápidamente a medida que el agua comienza a moverse en la región próxima al contacto agua-petróleo. A medida, que mayores volúmenes de agua entran en movimiento, la caída total de presión con tiempo disminuye. Si el acuífero es uniforme en propiedades e infinito, Curva 1, la caída total de presión siempre aumenta con tiempo pero cada vez a una rata menor a medida que el tiempo avanza. Un

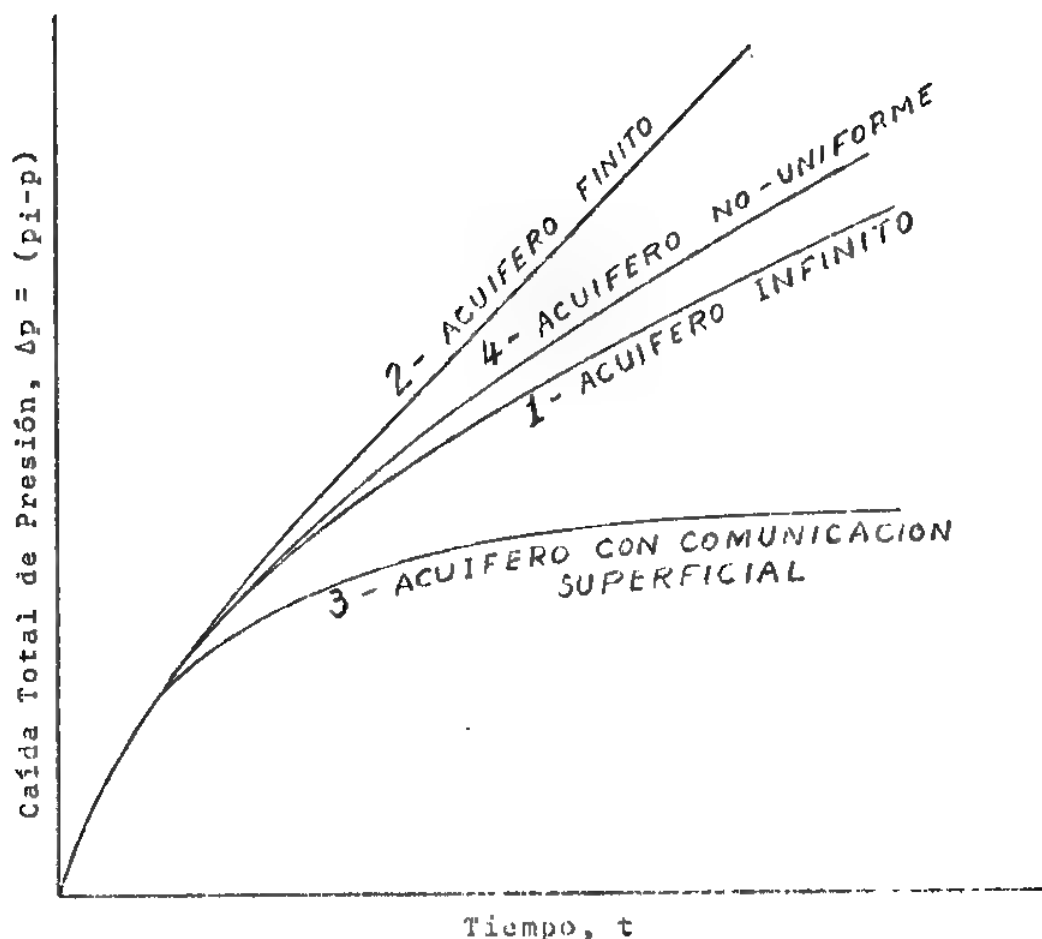


Fig.60 - Caída total de presión en el contacto agua-petróleo como función de tiempo para una rata de intrusión,  $e$ , constante y de acuerdo al tipo de acuífero

gráfico de  $\Delta p$  contra  $\log(t)$  para este tipo de acuífero presenta una pendiente que disminuye constantemente con tiempo hasta que se hace constante. Fig.19. Esta propiedad es básica para la predicción, como se verá más adelante.

Si el acuífero es limitado (finito) / cerrado, el área de disturbio alcanzará el límite exterior y de allí en adelante la rata a la cual la presión disminuye es constante, Curva 2, ya que la caída de presión en el acuífero, se debe al agotamiento del volumen limitado

do de fluido del acuífero. En este caso puede escribirse,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{cV_p} \quad (189)$$

donde  $c$  es la compresibilidad del agua y  $V_p$  es el volumen poroso del acuífero.

En la Fig.60 también se indican otras curvas: Curva 3, caso de un acuífero que comunica a la superficie y por consiguiente después de determinado tiempo, la caída de presión con tiempo es cero. Finalmente, la Curva 4, donde ocurre inhomogeneidades en el acuífero.

Las curvas de esta figura presentan una característica importante: la pendiente siempre disminuye con tiempo o se hace constante pero nunca aumenta. Esta propiedad se expresa diciendo que la pendiente disminuye monotónicamente. Este principio y la forma de las curvas es la base del método de Hutchinson y Sikora.

En la discusión correspondiente el principio de superposición, se dedujeron ecuaciones para calcular la caída total de presión en el contacto agua-petróleo, cuando la rata de intrusión varía con tiempo en la forma indicada en la Fig.54. Tales ecuaciones (Ecs.(81) y (86)), pueden escribirse en forma general,

$$\Delta p = A \sum_{j=1}^n e_{n+1-j} \left[ F\{(t_n - t_{n-j})_D\} - F\{(t_n - t_{n+1-j})_D\} \right] \quad (190)$$

donde  $A$  es una constante que depende del tipo de acuífero y  $F(t_D)$  es una presión adimensional que puede ser  $F_k(t_D)$  o  $A_p(t_D)$  de acuerdo al acuífero, según indican las Ecs.(81) y (86).

La presión adimensional  $F(t_D)$  depende del tiempo adimensional  $t_D$  y éste depende del tiempo dimensional,  $t$ , a través de la constante  $\Delta t_D$ . Por tanto  $F(t_D)$  depende de  $t$  y puede escribirse  $F(t)$ . Multiplicando éste valor por  $A$  y definiendo el producto como una nueva función de resistencia,  $Z(t)$ , o simplemente función  $Z$ , la ecuación anterior puede escribirse,

$$\Delta p = \sum_{j=1}^n e_{n+1-j} [Z(t_n - t_{n-j}) - Z(t_n - t_{n+1-j})] \quad (191)$$

En esta ecuación, la función  $Z$  se obtiene a los tiempos dimensionales  $(t_n - t_{n-j})$  y  $(t_n - t_{n+1-j})$

Si los intervalos de tiempo,  $(t_{j+1} - t_j) = \Delta t$ , son iguales, luego,  $t_n = n\Delta t$  y  $t_j = j\Delta t$  y la ecuación anterior puede escribirse,

$$\Delta p = \sum_{j=1}^n e_{n+1-j} [Z(j\Delta t) - Z((j-1)\Delta t)] \quad (192)$$

$$\Delta p = \sum_{j=1}^n e_{n+1-j} \Delta Z_j \quad (193)$$

donde,

$$\Delta Z_j = Z(j\Delta t) - Z((j-1)\Delta t) \quad (194)$$

Si se conoce una curva de  $Z$  como función de tiempo, puede calcularse la caída total de presión en el contacto agua-petróleo por medio de la Ec.(193). De la historia del yacimiento puede obtenerse tal curva de  $Z$  como función de tiempo y su extrapolación, de acuerdo a la forma, puede usarse para la predicción, usando también la Ec.(193).

Los siguientes pasos, resumen la obtención de la mejor función

Z contra tiempo:

1 - Se divide la historia del yacimiento en iguales intervalos de tiempo,  $\Delta t$ , y usando la ecuación de balance de materiales, se calcula la intrusión total de agua  $W_e$ , a cada tiempo de la historia. Por supuesto, esto considera que se conoce el petróleo originalmente en el yacimiento,  $N$

2 - Se calcula la rata promedio de intrusión de agua a cada tiempo, dividiendo por  $\Delta t$ , el promedio de la diferencia entre el  $W_e$  al tiempo posterior menos el  $W_e$  al tiempo anterior,

$$e_j = \frac{W_{ej+1} - W_{ej-1}}{2\Delta t} \quad (195)$$

Como antes se mencionó, algunos yacimientos que producen por encima del punto de burbujeo, la rata de producción puede considerarse igual a la rata de intrusión. En este caso, los Pasos 1) y 2) podrían eliminarse.

3 - De la historia del yacimiento, se calcula la caída de presión total,  $\Delta p_j = (p_i - p_j)$ , denominada caída de presión observada,  $(\Delta p_j)_{obs}$

4 - Se asume una primera aproximación de Z como función de tiempo. Si cada período se numera ascendentemente, 1, 2, 3, ... j ... n, donde j, varía de 1 a n; se toma como primera aproximación de  $Z_j$  la raíz cuadrada del número del intervalo,

$$Z_j = \sqrt{j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots n) \quad (196)$$

5 - Se determina  $\Delta Z_j$  y por medio de la Ec.(193) se calcula una caída de presión total, denominada caída de presión calculada. Debe tenerse cuidado al usar esta ecuación ya que los términos de la su

matoria estan arreglados en orden inverso, es decir, la rata de intrusión para el intervalo  $n$  se multiplica por el  $\Delta Z_1$  para el intervalo 1; la rata de intrusión para el intervalo  $(n-1)$ , estará multiplicada por el  $\Delta Z_2$  del intervalo 2, etc. Por tanto, es conveniente escribir una columna invirtiendo el orden de la rata de intrusión, y así la multiplicación de esta columna con la columna de los  $\Delta t_j$  dará directamente los  $\Delta p$  calculados,  $(\Delta p_j)_{cal}$ .

6 - Se divide cada  $\Delta p$  observado (obtenido en el Paso 3) por el correspondiente  $\Delta p$  calculado en el Paso 5). El cuociente se denomina,  $f_{cj}$ , factor de corrección  $j$ .

7 - Se multiplica cada  $Z_j$  por el correspondiente factor de corrección,  $f_{cj}$ , del paso anterior:  $Z_j$  (nuevo) =  $f_{cj} Z_j$  (viejo). Se grafica  $Z_j$  como función de  $j$  (equivalente  $Z_j$  como función de tiempo) y se traza una curva continua a través de los puntos, teniendo en cuenta que la pendiente siempre debe ser positiva y disminuir o permanecer constante con tiempo.

8 - A cada intervalo se lee un nuevo valor de  $Z_j$  del gráfico del paso anterior y se repiten los Pasos del 5) al 8) hasta que los valores de  $Z_j$  en dos iteraciones sucesivas sean iguales o cambien dentro de una aproximación aceptable. Generalmente es suficiente entre tres y cinco iteraciones. Este paso también puede formularse diciendo que las iteraciones se repiten hasta cuando los factores de corrección,  $f_{cj}$ , lleguen a ser relativamente constantes e iguales o muy cercanos a la unidad.

9 - Con los últimos valores de  $\Delta p$  calculados y los  $\Delta p$  observados, se calcula un factor de corrección promedio,  $f_{cp}$ , por la fórmula,



$$f_{cp} = \frac{\sum_{j=1}^n (\Delta p_j)_{obs}}{\sum_{j=1}^n (\Delta p_j)_{cal}} \quad (197)$$

10 - Se calculan los mejores valores de  $Z_j$ , multiplicando los últimos valores leídos del gráfico en la última iteración (Paso 7), por el factor de corrección promedio,  $f_{cp}$ , del paso anterior.

11 - Se determinan los mejores valores de  $\Delta p$  calculados multiplicando los últimos valores de  $\Delta p$  obtenidos, por el factor de corrección promedio,  $f_{cp}$ . Estos nuevos valores de  $\Delta p$  calculados deben chequear aproximadamente con los  $\Delta p$  observados.

Este último paso no es absolutamente necesario ya que los mejores valores de  $Z_j$  se obtuvieron en el Paso 10), pero sirve como un chequeo más y muchas veces se desea conocer la diferencia exacta en los  $\Delta p$ .

Predicción. - Los mejores valores de  $Z_j$  se grafican como función de  $j$  y se traza una curva continua a través de ellos. La predicción depende de la forma en que esta curva se puede extrapolar de acuerdo a lo discutido respecto a la Fig.60. Pueden ocurrir varios casos:

1) - Si la última parte de la curva de  $Z_j$  como función de  $j$  es una línea recta definida, es lógico considerar un acuífero limitado y la exploración se hará linealmente, es decir  $\Delta Z_j$  (pendiente) es constante, en papel normal.

2) - Si la curva de  $Z_j$  contra  $j$  en papel normal no presenta linealidad, puede que la presente al graficarse como función de  $\log(j)$ .

Este caso indica que el acuífero es infinito. Para su extrapolación, se consideran dos casos:

Caso a. Que el acuífero se siga comportando como infinito en el futuro y se extrapolará el  $Z_j$  como una línea recta al graficarse como función de  $\log(j)$ . En este caso la extrapolación de la pendiente puede hacerse usando la ecuación,

$$\Delta Z_{j+1} = \Delta Z_j \frac{\log \left[ \frac{j+1}{j} \right]}{\log \left[ \frac{j}{j-1} \right]} \quad (198)$$

donde  $j$  es un período cualesquiera en el futuro,  $j > n$ .

Caso b. Que el acuífero sea finito, pero que se haya comportado como infinito hasta el tiempo  $n$ . De aquí en adelante se comporta como finito y se extrapolará  $Z_j$  contra  $j$  como una línea recta en papel normal, tomando la última pendiente conocida.

3 - Puede ocurrir que tanto  $Z_j$  como función de  $j$ , o  $Z_j$  como función de  $\log(j)$  no presentan linealidad. En este caso nada puede decirse respecto a que el acuífero sea infinito, y lo más recomendado es usar el promedio de la pendiente para los 3 o 4 últimos intervalos y extrapolar como una línea recta en papel normal, es decir, asumir un acuífero limitado.

4 - Ya que la intrusión de agua por caída de presión unitaria es menor para un acuífero finito que para uno infinito de características iguales, en algunos casos se toma un promedio de los valores de  $Z$ , considerando acuíferos infinitos y finitos.

Una vez definida la extrapolación de la curva Función de Resistencia  $Z$ , por medio de la Ec.(193) puede predecirse la presión para una rata de intrusión dada, o lo contrario, puede predecirse rata de intrusión para una presión dada. Esto se hace paso por paso para cada intervalo en el futuro. Por ejemplo, la Ec.(193) escrita para el intervalo  $n+1$ , a la que se conoce  $Z_{n+1}$ , será,

$$(p_i - p_{n+1}) = e_{n+1} \Delta Z_1 + \sum_{j=2}^{n+1} e_{n+2-j} \Delta Z_j \quad (199)$$

De esta ecuación, puede calcularse  $p_{n+1}$ , si se conoce  $e_{n+1}$ , o lo contrario, puede calcularse  $e_{n+1}$  si se conoce  $p_{n+1}$ .

#### Funciones de Influencia.

El método de Hutchinson y Sikora discutido en la sección anterior es un caso particular de Funciones de Influencia, sólo que tal caso, se denominó Función de Resistencia  $Z(t)$ . En la presente discusión se denomina  $F(t)$  con el fin de usar la misma nomenclatura empleada en la literatura.

En valor de presión adimensional  $A_p(t_D)$  de la Ec.(83) depende de  $t_D$  y éste de  $t$ , por tanto puede escribirse como un valor  $A_p(t)$ . Este valor multiplicado por  $A$  se define como Función de Influencia  $F(t)$  o simplemente  $F$  y puede escribirse,

$$\Delta p = (p_i - p_n) = \sum_{j=1}^n (e_{n+1-j} - e_{n-j}) F_j \quad (200)$$

Nótase que en esta ecuación se ha invertido la sumatoria comenzando por el último cambio en la rata de intrusión que actúa por el tiempo menor, luego el penúltimo cambio en la rata de intrusión que actúa

por un tiempo un poco mayor y así sucesivamente. En esta forma las funciones de influencia aparecen en la sumatoria en orden ascendente.

La ecuación anterior también puede expresarse en la forma de la Ec.(193),

$$\Delta p = (p_i - p_n) = \sum_{j=1}^n e_{n+1-j} \Delta F_j \quad (201)$$

donde  $\Delta F_j = F_j - F_{j-1}$

La forma de las curvas de  $F(t)$  contra tiempo es del tipo de las curvas de la Fig.60. Además,  $F(t)$  en unidades prácticas, generalmente se expresa en lpc/bls/día, tal como puede verse de las Ecs.(200) y (201). También de estas ecuaciones puede verse que la presión y rata de intrusión están relacionadas a través de la función de influencia, la que puede definirse como la respuesta en presión en el contacto agua-petróléico a una rata de intrusión unitaria causada por una caída de presión unitaria en el mismo contacto agua-petróleo. La función de influencia refleja la heterogeneidad y geometría del acuífero. Por tanto, existe una función particular para cada sistema yacimiento-acuífero.

Si se conoce la  $F(t)$  contra tiempo, puede predecirse la presión a partir de un programa de rata de intrusión o viceversa, predecir rata de intrusión, si se conoce la presión. En este caso, a través de balance de materiales puede predecirse producción acumulada y rata de producción de petróleo.

Como antes se mencionó, el método de Hutchinson y Sikora es un caso particular de obtención de la función de influencia a partir de la historia del yacimiento. Las soluciones de Nabor<sup>9</sup>, van Everdingen

y Hurst<sup>7</sup> y Mueller<sup>21</sup> para los sistemas lineal y radial ideales vistos anteriormente, permite obtener fácilmente las funciones de influencia para cada caso particular, conociendo las constantes A y  $\Delta t_D$ , en la forma indicada al discutir la Ec.(200).

Hicks y otros<sup>33</sup>, discuten el uso de analizadores eléctricos para determinar la función de influencia que describe la historia de un yacimiento y permite efectuar la predicción del mismo. Coats y otros<sup>34</sup> desarrollan un método para obtener la función de influencia por programación lineal a través de computadores y a partir de la historia de presión y rata de intrusión. El programa, además de utilizar la Ec.(200), debe cumplir otras condiciones, ya que la sola programación de la Ec.(200) presenta variaciones en la pendiente de  $F_j$  y tal como se discutió en el método de Hutchinson y Sikora, la pendiente de la curva de  $F(t)$  contra  $t$  debe disminuir monotónicamente.

#### Modelos Eléctricos.

Más comunmente se conocen con el nombre de analizadores eléctricos<sup>54</sup> o simplemente mallas RC, donde R significa Resistencia y C significa Condensador. Cada modelo se compone de una red de condensadores y resistencias en base a una división del área del yacimiento y del acuífero. Cada una de estas áreas encierra un volumen de formación dado (bloque) y la capacitancia del fluido, definida como el producto del volumen de fluido dentro de los poros y la compresibilidad del fluido, se representan por un condensador. Los valores relativos de la capacidad de los condensadores se fijan por la ecuación,

$$C_E = \frac{M_{cah\phi c}}{5,615} \quad (202)$$

donde,  $C_E$  = capacidad eléctrica del condensador, en microfaradios;  $M_C$  = constante del escalamiento entre el fluido y las unidades eléctricas, en microfaradios/bls./lpc;  $a$  = área de cada división de la red, en pies cuadrados (ya que el área se divide generalmente en cuadrados, a veces se usa  $L^2$  en lugar de  $a$ , donde  $L$  es el lado del cuadrado);  $h$  = espesor en el área  $a$ , en pies;  $\phi$  = porosidad promedio del volumen  $ah$ , fracción;  $c$  = compresibilidad del fluido en los poros, lpc<sup>-1</sup>.

La resistencia al flujo entre los centros de los bloques de la red se representa por una resistencia variable, conectada a los condensadores correspondientes. Los valores relativos de las resistencias se representan por la ecuación,

$$R_E = \frac{N_R \mu}{0,001127 kh} \quad (203)$$

donde  $R_E$  = resistencia eléctrica, en mega-ohmios;  $N_R$  = constante de escalamiento del analizador, en mega-ohmios/lpc/bls./día;  $k$  = permeabilidad, en md.;  $\mu$  viscosidad del fluido, en cp.;  $h$  = espesor promedio del bloque, en pies.

El voltaje en los condensadores representa la presión del yacimiento,

$$\Delta E = P \Delta p \quad (204)$$

donde,  $\Delta E$  = voltaje a través de los condensadores, en voltios;  $P$  = constante de escalamiento, en voltios;  $\Delta p$  = caída de presión entre bloques, en lpc.

Finalmente, el flujo de corriente de cada condensador representa la intrusión de agua o producción de petróleo,

$$I = Q e$$

(205)

donde,  $I$  = flujo de corriente de cada condensador, en micro-amperios;  
 $Q$  = constante de escalamiento, en micro-amperios/bls./día;  $e$  = rata de intrusión (o producción) en bls/día.

La Fig.61 presenta un ejemplo del Campo East Texas (Estados Unidos) rodeado por un acuífero, la división en áreas (bloques) y el analizador eléctrico correspondiente, con el que se hizo un estudio del campo y predicción del mismo<sup>51</sup>. Cada punto representa el centro de un bloque donde se asume que ocurra la expansión del fluido. Además, a cada punto va unido un condensador. Los bloques están conectados entre sí por resistencias. El número de bloques depende de la aproximación deseada ya que se supone una presión promedio para cada bloque.

Para simular la producción del campo East Texas, se retira corriente de la malla (analizador) en el punto situado a la derecha, que representa el campo. Por otro lado, para simular inyección de agua a lo largo del extremo (límite) oeste del campo, se introduce corriente proporcional al volumen de agua inyectada en el punto donde se unen las resistencias del acuífero y del campo, tal como indica la Fig.61.

En general, para el estudio del comportamiento de un yacimiento, los condensadores se cargan inicialmente al mismo voltaje, lo que representa igual presión inicial, y sus capacidades son proporcionales al producto del volumen comprimido en cada bloque y a la compresibilidad efectiva. Si el bloque está localizado en un acuífero, el fluido será agua y la compresibilidad es la del agua. Las resistencias representan la resistencia al flujo entre las unidades (áreas en que se ha dividido el sistema). En esta analogía, la caída en voltaje es propor-

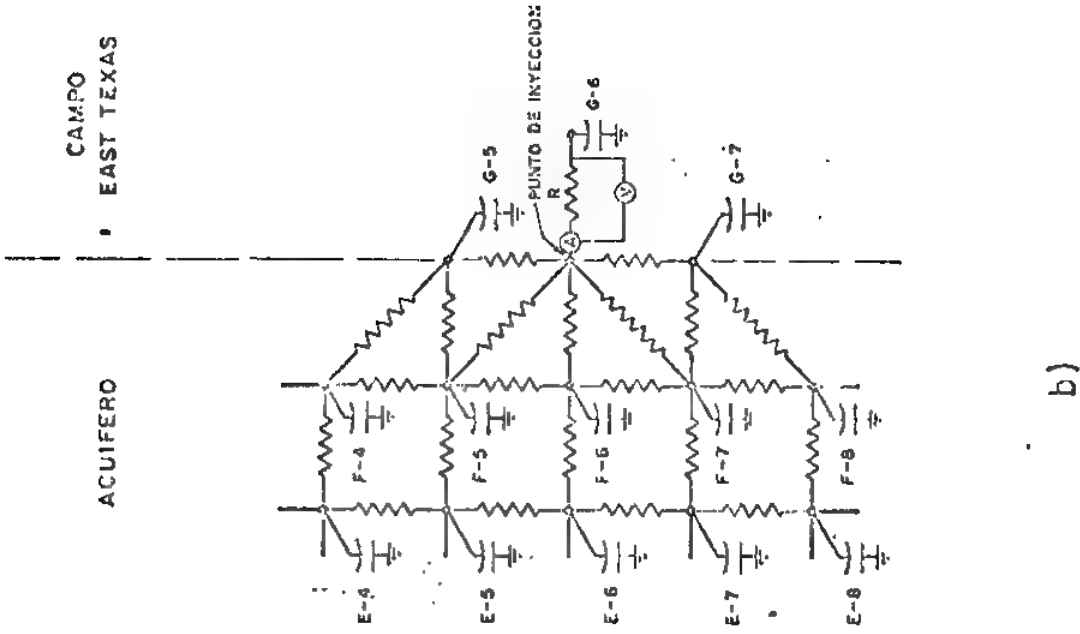
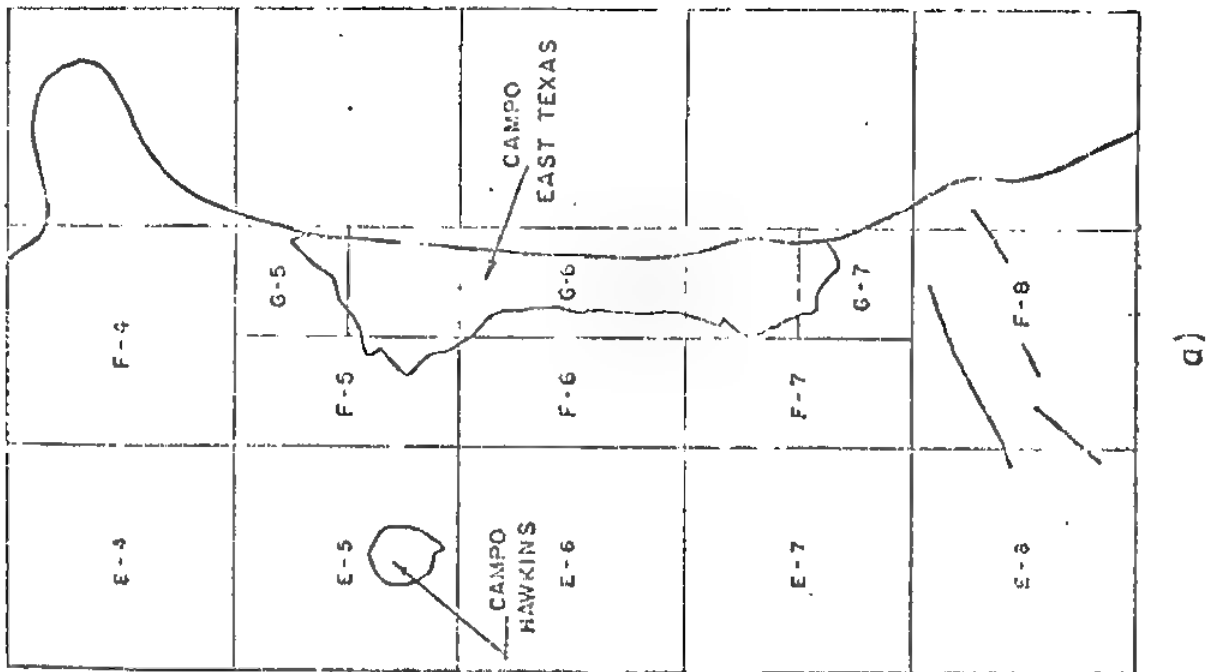


Fig. 61.- a) Campo East Texas, Estados Unidos, rodeado de un acuífero y subdividido en áreas (bloques);  
b) analizador eléctrico para el estudio del campo. (Referencia 51).



cional a la declinación de presión.

Con el fin de analizar la historia de un yacimiento y predecir su comportamiento, las resistencias y condensadores del acuífero se regulan por ensayo y error (tanteo) hasta que el instrumento reproduzca aproximadamente la historia pasada de presión y producción del yacimiento. Para regular (calibrar) inicialmente el instrumento en forma adecuada, se requiere por lo menos dos o tres años de historia del yacimiento. En la práctica, se escoge una escala adecuada de tiempo, por ejemplo, un minuto = un año y se varía paso a paso la resistencia R, lo que representa el flujo del yacimiento a intervalos exactos. Las corrientes producidas, leídas en el amperímetro A, son proporcionales a las ratas de intrusión de agua durante el intervalo. Estas ratas se calculan por los métodos vistos anteriormente. Cuando la curva entre voltaje y tiempo, generalmente reproducida en un voltímetro con registrador, coincide aproximadamente con la curva tiempo-presión de la historia pasada del yacimiento, se asume que los condensadores y resistencias del instrumento están debidamente regulados para representar el acuífero. Con el instrumento regulado en esta forma, puede simularse el comportamiento del campo cuantas veces se quiera, bajo las ratas de producción e inyección deseadas.

Los analizadores eléctricos más conocidos son el Analizador Carter<sup>50</sup> y el Analizador Sun<sup>53</sup>. Este último realmente es un Computador Analógico, pues además de componerse de una serie de resistencias y condensadores tiene incorporado un sistema que permite resolver automática y simultáneamente la ecuación de balance de materiales y la ecuación de intrusión de agua de flujo no-continuo. En esta forma se elimina la solución por ensayo y error (tanteo) de estas ecuaciones.

Tanto los analizadores eléctricos como los computadores analógicos tienen ya muy poco a casi ningún uso en la industria petrolera y en su gran mayoría hoy hacen uso de modelos numéricos para la simulación de yacimientos.

#### Modelos Numéricos de Yacimientos.

El desarrollo de computadores digitales, trajo como consecuencia la posibilidad de resolución de problemas cada vez más complejos, especialmente en la solución de ecuaciones diferenciales, imposibles de resolver analíticamente (ecuaciones no-lineales). En la industria petrolera se habla comunmente de Modelos Matemáticos o simplemente Modelos Numéricos de Yacimientos<sup>55</sup>.

En general, los modelos numéricos de yacimientos consisten en la solución numérica de las ecuaciones fundamentales de flujo<sup>18</sup> para cada una de las fases considerados en el sistema y considerando inyección, producción, intrusión de agua, etc. además de la información misma sobre propiedades de la formación y fluidos del yacimiento. De acuerdo a las ecuaciones fundamentales de flujo usadas, se conocen varios tipos de modelos: (a) de una fase y una, dos o tres direcciones, (b) dos fases y una, dos o tres direcciones y (c) tres fases y una, dos o tres direcciones.

Las ecuaciones fundamentales de flujo se escriben en forma de diferencias finitas, tanto en espacio (direcciones) como en tiempo. Se coloca una malla de diferencias sobre el campo de petróleo o yacimiento como ilustra la Fig.62. A cada punto de la malla (nodo) se le asigna un valor de permeabilidad, espesor, porosidad, contenido de fluidos (saturaciones iniciales), elevación, y presión. A los fluidos (petró-

leo, gas y agua, en caso de un modelo trifásico) se le asignan valores de factores volumétricos, solubilidad y densidad. También debe conocerse la compresibilidad de la formación. Las fuerzas entre roca y fluidos se conocen de las siguientes funciones, dependientes de la saturación: permeabilidad relativa para cada fase, presión capilar entre petróleo y agua, presión capilar entre agua y petróleo. Otra información necesaria proviene de los pozos e incluye: intervalo productor, rata de producción de petróleo, gas y agua como función de tiempo y presión observada como función de tiempo.

En un proceso de simulación se asignan tasas de producción por pozo para cada una de las fases. Luego se considera una diferencia fi

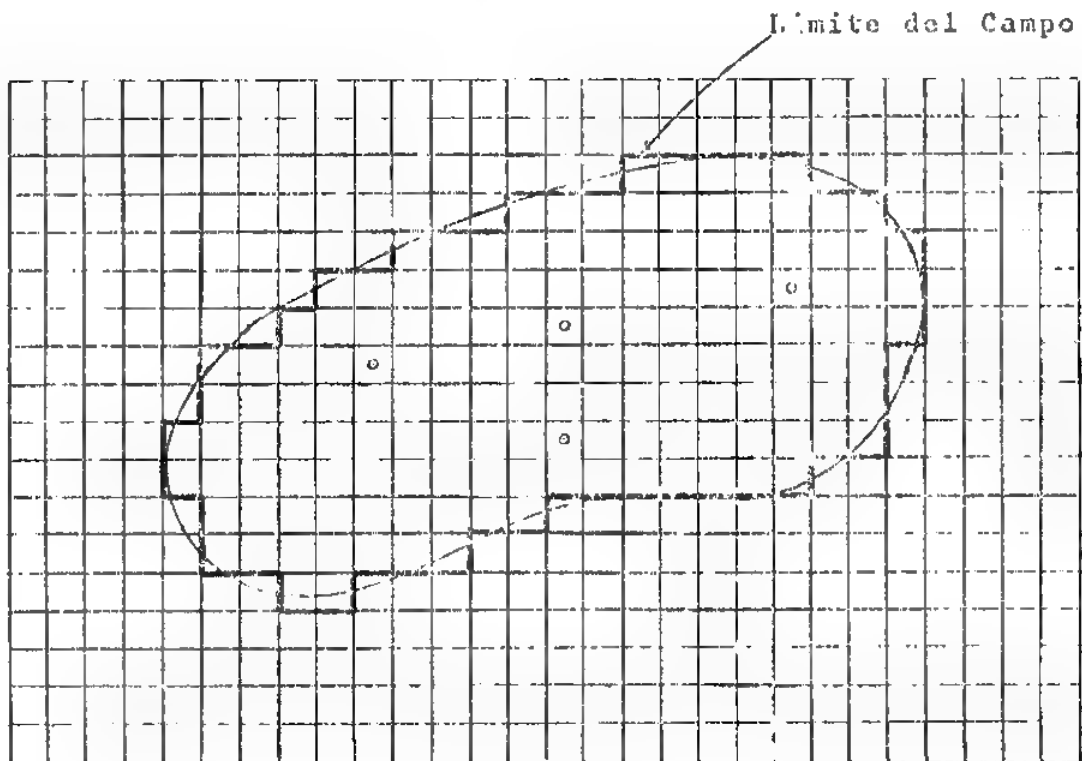


Fig.62 - Malla superpuesta en un campo de petróleo.  
o pozos.

nita de tiempo y se calculan nuevas presiones y ratas de producción. Estas se calculan de las saturaciones existentes en cada punto (nodo) de la malla. El proceso se repite para determinado número de intervalos de tiempo y en esta forma, se calcula tanto la historia de producción como de presión por pozo.

Una de las aplicaciones más importantes de modelos numéricos de yacimientos es el estudio de la historia y predicción del comportamiento de un yacimiento. En el estudio de la historia del yacimiento, se trata de reproducir la misma a través del modelo para lo cual se calculan presiones y ratas de producción como función de tiempo y se comparan con los valores observados. Si no coinciden dentro de una aproximación aceptable puede ser necesario modificar algunos datos hasta que la historia observada y calculada coinciden con la exactitud deseada.

Para la predicción, se asignan ratas de producción, a los pozos o al campo en total lo mismo que ratas de inyección en puntos determinados. Con este esquema de producción e inyección se estudia el comportamiento del campo empleando la información necesaria usada para el análisis de la historia. En esta forma, pueden evaluarse varios esquemas (programas) de producción e inyección. Introduciendo consideraciones económicas, puede seleccionarse la forma óptima de explotación (producción) de un campo o yacimiento.

#### INTERFERENCIA ENTRE CAMPOS LOCALIZADOS EN UN MISMO ACUÍFERO.

A veces se encuentran zonas donde varios campos de petróleo están localizados dentro de un mismo acuífero, es decir, comparten o están afectados por un acuífero común. Tales campos se encuentran

en comunicación hidrodinámica; por consiguiente, la producción de fluido de uno de estos campos, trae como consecuencia una declinación de presión que se transmite a otro u otros campos a través del acuífero, ocurriendo un proceso de interferencias de presión entre campos. Este comportamiento, puede conducir a una reducción en presión en puntos localizados a varios kilómetros de un campo en producción.

Uno de los ejemplos más típicos de interferencia de campos en un acuífero común se refiere a la formación Woodbine en el oriente del Estado de Texas, E.U<sup>51</sup>. En esta formación se encuentran mas de doce campos importantes de petróleo con empuje hidráulico activo, compartiendo el mismo acuífero. Entre estos campos se encuentra el famoso campo East Texas.

La producción de varios de estos campos (principalmente el campo East Texas, descubierto en 1930) trajo como consecuencia que la presión inicial del campo Hawkins (ver Fig.61), descubierto en 1940, fuera 280 lpca por debajo de la presión inicial del acuífero<sup>56</sup>. Esto indica que el efecto de interferencia en cuanto a presión se refiere, puede ser y debe tenerse en cuenta en el estudio del comportamiento de campos situados en un acuífero común. Otros ejemplos típicos de campos que comparten un acuífero común pueden encontrarse en la literatura<sup>57,58,59</sup>.

Uno de los métodos más comunes para evaluar problemas de interferencia en un acuífero común, es el descrito por Mortada<sup>26</sup>. Este método tiene las siguientes suposiciones: (1) cada campo dentro del acuífero común, tiene forma circular y la caída de presión determinada en el contacto agua-petróleo de cada campo representa la caída de presión promedio en el campo, (2) acuífero infinito, (3) la compresibilidad efectiva ( $c_w + c_p$ ) es constante e independiente de presión, (4) formación uniforme

es decir, valores constantes de  $\phi$ ,  $k$ ,  $h$  y también constantes las propiedades de los fluidos.

Considérese un acuífero donde existen tres campos de petróleo A, B, C, tal como lo indica la Fig.63. Se conoce la distancia entre los campos, AB, AC, BC y los radios de los mismos,  $R_{iA}$ ,  $R_{iB}$ ,  $R_{iC}$ . Debido a la producción de cada uno de estos campos, ocurre interferencia entre sí a través del acuífero. La producción del campo A trae como consecuencia una caída (disminución) de presión en los campos B y C. Similarmente la producción del campo B lleva consigo una pequeña caída de presión en el mismo campo B y una pequeña caída de presión en los campos A y C. Igual cosa sucede con el campo C.

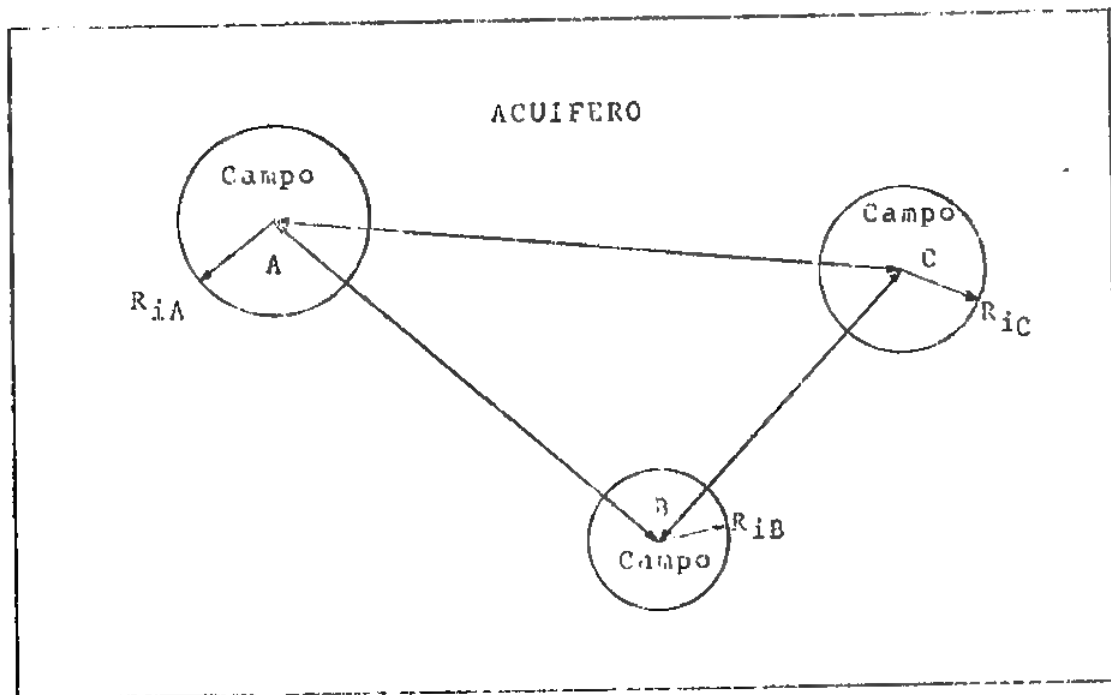


Fig. 63 - Esquema de un acuífero común que contiene tres campos de petróleo A, B y C.

Sea,  $(p_i - p)_{AA}$ , la caída total de presión (a partir de la condición inicial) en el Campo A debido a su propia producción. Igualmente,  $(p_i - p)_{BB}$  y  $(p_i - p)_{CC}$ , las caídas totales de presión en los campos B y C debido a sus propias producciones. Además,  $(p_i - p)_{AB}$  es la caída total (a partir de la condición inicial) de presión en el Campo A debido a la producción del Campo B. Igualmente,  $(p_i - p)_{AC}$  es la caída total de presión en el campo A debido a la producción del campo C y así sucesivamente en caso de que existieran más campos.  $(p_i - p)_{BA}$  y  $(p_i - p)_{BC}$  serán las caídas totales de presión en el campo B debido a la producción de los campos A y C y finalmente,  $(p_i - p)_{CA}$  y  $(p_i - p)_{CB}$  son las caídas totales de presión en el campo C debido a la producción de los campos A y B. De lo anterior puede escribirse la caída total de presión en el campo A, definido por  $(p_i - p)_A$ ,

$$(p_i - p)_A = (p_i - p)_{AA} + (p_i - p)_{AB} + (p_i - p)_{AC} \quad (206)$$

Similarmente, las caídas totales de presión en los campos B y C,

$$(p_i - p)_B = (p_i - p)_{BB} + (p_i - p)_{BA} + (p_i - p)_{BC} \quad (207)$$

$$(p_i - p)_C = (p_i - p)_{CC} + (p_i - p)_{CA} + (p_i - p)_{CB} \quad (208)$$

Los términos que llevan el subíndice mezclado (AB, AC, BA, etc) se denominan "cambios (caídas) de presión debido a interferencia" para distinguírlos de los términos con subíndice de la misma letra (AA, BB, CC) que representan el "cambio (caída) de presión debido a la misma producción del campo".

Para el cálculo del cambio de presión debido a la misma producción,  $(p_i - p)_{AA}$ ,  $(p_i - p)_{BB}$ , etc., se hace uso de la solución de van

Everdingen y Hurst para sistemas infinitos discutida anteriormente, Ec.(37), cuando  $r_D=1$ . Los cambios de presión debido a interferencia,  $(p_i-p)_{AB}$ ,  $(p_i-p)_{BA}$ , etc. se obtienen a partir de la solución de Mortada<sup>26</sup> para sistemas infinitos, también discutida anteriormente, Figs. 20, 21, 22, 23 y Tabla III, para el valor apropiado de  $r_D$ . Este valor se obtiene dividiendo el valor de la distancia entre los campos considerados por el valor del radio del campo que causa la interferencia. Con referencia a la Fig.61, por ejemplo, si se está estudiando el efecto de la producción del Campo B sobre el Campo A, para calcular  $(p_i-p)_{AB}$ , se usará  $r_D = \overline{AB}/R_{iB}$ ; en cambio, para evaluar el efecto de la producción del Campo A sobre el Campo B,  $(p_i-p)_{BA}$ , se usará  $r_D = \overline{AB}/R_{iA}$ , y así sucesivamente.

Recuérdese que las soluciones mencionadas en el párrafo anterior se refieren al caso de rata terminal constante. En este caso debe usarse la rata de intrusión y aplicar el teorema de superposición para considerar variación en la rata de intrusión, Ec.(84),

$$\Delta p = (p_i-p) = \frac{141,2 \mu}{kh} \sum_{j=1}^n (e_j - e_{j-1}) \Delta p[(t_n-t_{j-1})_D] \quad (84)$$

donde  $t_0$  y  $e_0$  son iguales a cero. Para el caso de calcular los valores de  $(p_i-p)_{AA}$ ,  $(p_i-p)_{BB}$ , etc., las presiones adimensionales  $\Delta p(t_D)$  se obtienen de la Tabla II, Fig.19 o Ecs.(41) y (42). Para el caso de calcular los valores  $(p_i-p)_{AB}$ ,  $(p_i-p)_{BA}$ , etc., las presiones adimensionales se obtienen de las Figs. 20, 21, 22, 23, Tabla III o Ecs.(49) y (50), para el valor correspondiente de  $r_D$ .

Debe tenerse en cuenta, que para yacimientos con empuje hidráulico, la rata de intrusión de agua más la rata de expansión de hi



drocarburos es igual a la rata de producción de petróleo. En general puede escribirse<sup>60</sup>,

$$\frac{dW_p}{dt} = e = B_o \frac{dN_p}{dt} + (R-R_s)B_g \frac{dN_p}{dt} + B_w \frac{dW_p}{dt} \quad (209)$$

$$e = B_t \frac{dN_p}{dt} + (R-R_{si})B_g \frac{dN_p}{dt} + B_w \frac{dW_p}{dt} \quad (210)$$

$$e = q_o [B_t + (R-R_{si})B_g] + B_w q_w \quad (211)$$

En caso de que el yacimiento se encuentre por encima del punto de burbujeo y si no existe producción de agua,  $B_t=B_o$ , y la ecuación anterior puede escribirse,

$$e = q_o B_o \quad (212)$$

En base a las ecuaciones anteriores puede convertirse fácilmente  $q_o$  a  $e$  o viceversa.

Las Ecs.(206),(207) y (208) permiten calcular las caídas totales de presión en los campos A, B, C, cuando se conocen las ratas de producción y por consiguiente intrusión. Muchos otros problemas pueden resolverse, de acuerdo a los datos disponibles. Por ejemplo: se tienen dos campos en un mismo acuífero y se conoce la historia de producción de A y la historia de presión de B. Para hacer la predicción en este caso, deben hacerse los siguientes pasos:

1)- Con los datos de historia de producción de A se determina  $(p_i-p)_{AAj}$  y  $(p_i-p)_{BAj}$ .

2) - Del dato  $(p_i-p)_{Bj}$  y el valor  $(p_i-p)_{BAj}$  se calcula.

$(p_i-p)_{BBj}$ .

$$(p_i-p)_{BBj} = (p_i-p)_{Ej} - (p_i-p)_{BAj}$$

3) - Utilizando la Ec.(95), se calcula la intrusión a cada tiempo (período) para el Campo B,

$$W_{eBj} = 1,119 \phi c h R_{iB}^2 \sum_{j=1}^j \Delta p_j Q[(t_n - t_{j-1})_B] \quad (95)$$

El valor de  $\Delta p_j = (p_i-p)_{BBj+1} - (p_i-p)_{BBj}$ . Con estos valores se calcula la historia de intrusión del Campo B,  $e_{Bj}$

4) - Se determina,  $(p_i-p)_{ABj}$ , aplicando la Ec.(84) y con los valores de  $e_{Bj}$  determinados en el Paso 3) y para  $r_D = AB/R_{iB}$ .

5) - Finalmente,

$$(p_i-p)_{Aj} = (p_i-p)_{AAj} + (p_i-p)_{ABj} \quad (213)$$

Robinson<sup>61</sup>, presenta un programa de computadores para corregir la ecuación de balance de materiales, escrita en la forma de la Ec.(136), debido a la interferencia de otros campos localizados en un mismo acuífero. En caso de interferencia, a la Ec.(136) debe agregarse otro término que tome en cuenta los efectos de interferencia. El trabajo de Robinson presenta un ejemplo, donde considera tres campos en un mismo acuífero.

R E F E R E N C I A S

- 1.- Pérez Palacio, Ramiro: Ingeniería de Yacimientos de Petróleo (Balance de Materiales y Predicción de Yacimientos), Universidad del Zulia, Escuela de Petróleo, 1964.
- 2.- Muskat, M.: The Performance of Bottom Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 170, 1947, p. 81.
- 3.- Hutchinson, T.S. and Kemp, C.E.: An Extended Analysis of Bottom Water-Drive Reservoirs Performance, Transactions AIME, Vol 207, 1956, p. 256.
- 4.- Henley, D.H., Owens, W.W. and Graig, F.F.: A Scale Study of Bottom-Water Drives, Transactions AIME, Vol. 22, 1961, p. 90.
- 5.- Elkins, L.F.: Fosteron Field-An Unusual Problem of Bottom Water Coning and Volumetric Water Invasion Efficiency, Transactions AIME, Vol. 216, 1959, p. 130. También, Petroleum Transactions Reprint Series of AIME, No.4, p. 161.
- 6.- Coats, K.H.: A Mathematical Model Water Movement about Bottom Water-Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 225, Part II, 1962. p. 44.
- 7.- van Everdingen, A.F. and Hurst, W.: The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 186, 1949, p. 105.
- 8.- Chatas, A.T.: A Practical Treatment of Nonsteady-State Flow Problems in Reservoirs Systems, Petroleum Engineer, May 1953 p. B-42 - B-50; June 1953, p. B-38 - B-50; August 1953, p. D-44 - D-56.
- 9.- Nabor, G.W. and Barham, R.H.: Linear Aquifer Behavior, Transactions AIME. Vol. 231, 1964, p. 561.
- 10.- Criss, C.R. and McCormick, R.L.: History and Performance of the Colwater Oil Field Michigan, Petroleum Transactions reprint Series, of AIME, No. 4, p. 53.
- 11.- Muskat, M.: Physical Principles of Oil Production, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1949.
- 12.- Stewart, G.M., Callaway, F.H. and Gladfelter, R.E.: Comparison of Methods for Analysing a Water Drive Field, Torchlight for Tensleep Reservoirs, Wyoming, Transactions AIME. Vol. 204, 1955, p. 197.
- 13.- Dodson, C.R. and Standing M.B.: Pressure-Volume-Temperature and Solubility Relations for Natural Gas-Water Mixtures, Drilling and Production Practices, American Petroleum Institute, 1944, p. 173.

- 14.- Craze, R.C. and Buckley, S.E.: A Factual Analysis of the Effect of Well Spacing on Oil Recovery, API Drilling and Production Practices, 1945, p. 144.
- 15.- Guthrie, R.K. and Greenberger, M.H.: The Use of Multiple Correlation Analysis for Interpreting Petroleum Engineering Data, API Drilling and Production Practice, 1955, p. 130.
- 16.- Arps, J.J. y otros: API Bul D14, A Statistical Study, of Recovery Efficiency, American Petroleum Institute, October 1967.
- 17.- Letter Symbols for Petroleum Reservoir Engineering, Natural Gas Engineering and Well Logging Quantities, Transactions AIME, Vol. 234, 1965, p. 1463.
- 17a.- Krans, E.: MER - A History, Drilling and Production Practice, API, 1947, p. 108.
- 17b.- Buckley, S.E.: Petroleum Conservation, American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, 1951, p. 151.
- 18.- Matthews, C.S. and Russel, D.G.: Pressure Buildup and Flow Tests in Wells, Monograph Volume 1, SPE of AIME, 1967, p. 4.
- 19.- Hurst, W.: Water Influx Into a Reservoirs and Its Application to the Equation of Volumetric Balance, Transactions AIME, Vol. 151, 1943, p. 57.
- 20.- Miller, F.C.: Theory of Unsteady-State of Water in Linear Reservoirs, Journal of the Institute of Petroleum, November 1962, p. 365.
- 21.- Mueller, T.D.: Transient Response of Monohogeneous Aquifers, Transactions AIME, Vol. 225, Part. II, 1962, p.33.
- 22.- Hurst, W.: Unsteady Flow of Fluids in Oil Reservoirs, Physics, January 1934, p. 5.
- 23.- Theis C.V.: The Relationship Between The Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge Using Crowd Water Storage, Transactions AGU, 1935, p. 519.
- 24.- Muskat, M.: The Flow of Homogeneous Fluid Through Porous Media, McGraw-Hill Book Co., 1937. También, J.W. Edwards, Ann Arbor, 1946.
- 25.- Mueller, T.D. and Witherspoon, P.A.: Pressure Interference Effects Within Reservoirs and Aquifer, Transactions AIME, Vol. 234, 1965, p. 471.
- 26.- Mortada, M.: A Practical Method for Treating Oilfield Interference in Water-Drive Reservoirs, Transactions AIME. Vol. 204, 1955, p. 217.
- 27.- Edwardson, M.J. y otros: Calculation of Formation Temperature

- Disturbances Caused by Mud Circulation, Transactions AIME, Vol. 225, 1962, p. 416.
- 28.- Matthews, C.S., Brons, F. and Hazebroek, P.: A Method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 201, 1954, p. 152.
  - 29.- Dietz, D.N.: Determination of Average Reservoir Pressure From Build-Up Surveys, Transactions AIME, Vol. 1965, p. 955.
  - 30.- Brons, F., and Miller, W.C.: A Simple Method for Correcting Spot Pressure Readings, Transactions AIME, Vol. 222, 1961, p. 803.
  - 31.- Advance Petroleum Engineering Course, Texas A and M University, February 3 - February 14, 1964.
  - 32 - Jahnke, E. and Emde, F.: Tables of Functions, Fourth Ed., Dover Publications, Inc, New York, 1945.
  - 33.- Hicks, A.L. y otros: Computing Techniques for Water Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 216, 1959, p. 400.
  - 34.- Coats, K.H. y otros: Determination of Aquifer Influence Functions From Field Data, Transactions AIME, Vol. 231, 1964, p. 1417.
  - 35.- Igual a Ref, 1, pgs, 9 y 30.
  - 36.- Schilthuis, R.J.: Active Oil and Reservoirs Energy, Transactions AIME, Vol. 118, 1936, p. 37. También, Petroleum Transactions Reprint Series No.3, p. 25.
  - 37.- Pirson, S.J.: Elements of Oil Reservoir Engineering Second Edition, McGraw-Hill Book Co., 1958. p. 608. Edición en Español: Ingeniería de Yacimientos Petrolíferos, Ediciones Omega, Barcelona, España, 1965, p. 647.
  - 38.- Speigal, M.R.: Theory and Problems of Statistics, Schaum Publishing Co., 1961, p. 219.
  - 39.- van Everdingen, A.F. Timmerman, E.H. and McMahon, J.J.: Application of the Material Balance Equation to a Partial Water - Drive Reservoir, Transactions AIME, Vol. 198, 1953, p. 51.
  - 40.- Havlena, D. and Odeh, A.S.: The Material Balance as an Equation of a Straight Line, Part I, Transactions AIME. Vol. 228, p. 896; Part II, Field Cases, Transactions AIME, Vol. 231, 1964, p. 815.
  - 41.- McEwen, C.R.: Material Balance Calculations with Water Influx in the Presence of Uncertainty in Pressure, Transactions AIME, Vol. 225, 1962, p. 120 - II.
  - 42.- Stanley L.T.: Curve Fitting Cuts Material Balance Calculations,

Petroleum Engineer, August 1961, p. 90.

- 43.- McKibbin, J.H., Paxmam, D.S. and Havlena, D.: A Reservoirs Study of the Sturgeon Lake South D-3 Pool, The Journal of Canadian Petroleum Technology, Vol.2, No.3, Fall 1963, p. 142.
- 44.- Welge, H.J.: A Simplified Method for Computing Oil Recoveries by Gas or Water Drive, Transactions AIME, Vol. 195, 1952, p. 91.
- 45.- Woody, L.D., Jr. and Monscrip III, R.: Performance Calculations for Combination Drive Reservoirs, Transactions AIME, Vol. 207, 1956, p. 129.
- 46.- Craft, B.C. and Hawkins, M.F.: Applied Petroleum Reservoir Engineering, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1959, p. 368. Edición en Español: Ingeniería de Yacimientos Aplicada, Editorial Tecnos, S.A., Madrid, España, 1968, p. 462.
- 47.- Buckley, S.E. and Leverett, M.C.: Mechanism of Fluid Displacement in Sands, Transactions AIME, Vol. 146, 1942, p. 107.
- 48.- Rachford, H.H. Jr., y otros: Application of Numerical Methods to Predict Recovery From Thin Oil Columns, Transactions AIME, Vol. 213, 1958, p. 193.
- 49.- Huchtchinson, T.S. and Sikora, V.J.: A Generalized Water-Drive Analysis, Transactions AIME, Vol. 216, 1950, p. 169.
- 50.- Bruce, W.A.: An Electrical Device for Analizing Oil Reservoir Behavior, Transactions AIME, Vol. 151. 1943, p. 112.
- 51.- Rumble, R.C. y otros: A Reservoir Analyzer Study of the Woodbine Basin, Transactions AIME, Vol. 192, 1951, p. 331. También: Petroleum Transactions Reprint Series No. 4, p. 123.
- 52.- Moore, W.D. and Truby, L.G., Jr.: The Pressure Performance of Five Fields Completed in a Common Acuífer, Transactions AIME, Vol. 195, 1952, p. 297.
- 53.- Patterson, O.L. y otros: The Determination of the Water Injection Program for the Delhi Field by Means of the Atomic Multipool Analyzer, Transactions AIME, Vol. 207, 1956, p. 73.
- 54.- Igual a Ref. 46, p. 236, Edición Española, p. 300.
- 55.- van Poolen, H.K., Bixel, H.C. and Jargon, J.R.: Reservoirs Modeling - 1: What it is, What it Does, The Oil and Gas Journal, July 28, 1969, p. 158.
- 56.- Bell, J.S. and Shepherd, J.M.: Pressure Behavior in the Woodbine Sand, Transactions AIME, Vol. 192, 1951, p. 19. También, AIME Petroleum Transactions Reprint Series No. 4, p. 113.
- 57.- Moore, W.D. and Truby, L.G., Jr.: Pressure Performance of Five Fields Completed in a Common Aquifer, Transactions AIME, Vol.

195, 1952, p. 297.

- 58.- Coats, K.H., Tek, M.R. and Katz, D.L.: Method for Predicting the Behavior of Mutually Interfering Gas Reservoirs Adjacent to a Common Aquifer, Transactions AIME, Vol. 216, p. 247.
- 59.- Paxman, D.S. and Havlena, D.: Effects of Hydrodynamics Pressure Interference on Reservoir Performance, Buffalo Lake D-3 Pool, Journal of Petroleum Technology, January 1966, p. 23.
- 60.- Igual a Ref. 46, p. 157.
- 61.- Robinson, M.P.: Pressure Interference Correction to the Material Balance for Water Drive Reservoir Using a Digital Computer, Transactions AIME, Vol. 213, 1958 p. 418.

APENDICE A

TABLA IA - Valores del Integral Exponencial  $-Ei(-x)$  como Función de  $x$ .

1- Intervalo de  $x$  entre 9 y  $9 \times 10^{-15}$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Xx1	0,219	0,049	0,013	0,0038	0,0011	0,00036	0,00012	0,000038	0,000012
Xx10-1	1,82	1,22	0,91	0,70	0,56	0,45	0,37	0,31	0,26
Xx10-2	4,04	3,35	2,90	2,58	2,47	2,30	2,15	2,03	1,92
Xx10-3	6,33	5,64	5,23	4,95	4,73	4,54	4,39	4,26	4,14
Xx10-4	8,63	7,94	7,53	7,25	7,02	6,84	6,69	6,55	6,44
Xx10-5	10,94	10,24	9,84	9,55	9,33	9,14	8,99	8,86	8,74
Xx10-6	13,24	12,55	12,14	11,85	11,63	11,45	11,29	11,16	11,04
Xx10-7	15,54	14,85	14,44	14,15	13,93	13,75	13,60	13,46	13,34
Xx10-8	17,84	17,15	16,74	16,46	16,23	16,05	15,90	15,76	15,65
Xx10-9	20,15	19,45	19,05	18,76	18,54	18,35	18,20	18,07	17,95
Xx10-10	22,45	21,76	21,35	21,06	20,84	20,66	20,50	20,37	20,25
Xx10-11	24,75	24,06	23,65	23,36	23,14	22,96	22,81	22,67	22,55
Xx10-12	27,05	26,36	25,96	25,67	25,44	25,26	25,11	24,97	24,86
Xx10-13	29,36	28,66	28,26	27,97	27,75	27,56	27,41	27,28	27,16
Xx10-14	31,66	30,97	30,56	30,27	30,05	29,87	29,71	29,58	29,46
Xx10-15	33,96	33,27	32,86	32,58	32,35	32,17	32,02	31,88	31,76

El número que encabeza cada columna, multiplica al número en la primera columna. Ejemplo:

$$-Ei(-7 \times 10^{-13}) = 27,41$$

$$\text{Para } x < 0,01: -Ei(-x) = -(\ln x + 0,5772) = \ln \frac{1}{x} - 0,5772 = \ln \frac{1}{4x} + 0,80907$$



TABLA IA - (Continuación).

2- Intervalo de x entre 0,01 y 0,99

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00		4,0379	3,3547	2,9591	2,6813	2,4679	2,2953	2,1508	2,0269	1,9187
0,10	1,9229	1,7371	1,6595	1,5889	1,5241	1,4665	1,4092	1,3578	1,3098	1,2649
0,20	1,2227	1,1229	1,1454	1,1099	1,0762	1,0443	1,0139	0,9849	0,9573	0,9309
0,30	0,9057	0,8815	0,8583	0,8361	0,8147	0,7942	0,7745	0,7554	0,7371	0,7194
0,40	0,7024	0,6859	0,6700	0,6549	0,6397	0,6253	0,6114	0,5979	0,5848	0,5721
0,50	0,5598	0,5478	0,5362	0,5250	0,5140	0,5030	0,4930	0,4830	0,4732	0,4636
0,60	0,4544	0,4454	0,4366	0,4280	0,4197	0,4115	0,4036	0,3959	0,3883	0,3810
0,70	0,3738	0,3668	0,3599	0,3532	0,3467	0,3403	0,3341	0,3280	0,3221	0,3163
0,80	0,3106	0,3050	0,2996	0,2943	0,2891	0,2840	0,2790	0,2742	0,2694	0,2647
0,90	0,2602	0,2557	0,2513	0,2470	0,2429	0,2387	0,2347	0,2308	0,2269	0,2231

El número que encabeza cada columna corresponde a la segunda cifra decimal. Por ejemplo:  
plo:  $-Ei(-0,38) = 0,7371$

3- Intervalo de x entre 1,0 y 4,9

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,2194	0,1860	0,1584	0,1355	0,1162	0,1000	0,08631	0,07465	0,06471	0,05620
2,0	0,04890	0,04261	0,03719	0,03250	0,02844	0,02491	0,02185	0,01918	0,01689	0,01482
3,0	0,01304	0,01149	0,01013	0,008939	0,007890	0,006970	0,006160	0,005443	0,004820	0,004267
4,0	0,005779	0,003349	0,002969	0,002633	0,002336	0,002073	0,001841	0,001635	0,001453	0,001291

El número que encabeza cada columna corresponde a la primera cifra decimal. Por ejemplo,  
 $-Ei(-3,7) = 0,005449$

4- Intervalo de x entre 5 y 15.

x	-Ei(-x)	x	-Ei(-x)	x	-Ei(-x)
-	0,001148	9	0,00001245	13	0,0000001622
6	0,0003601	10	0,000034157	14	0,0000005566
7	0,0001155	11	0,000001400	15	0,00000001913
8	0,00003737	12	0,0000004751		

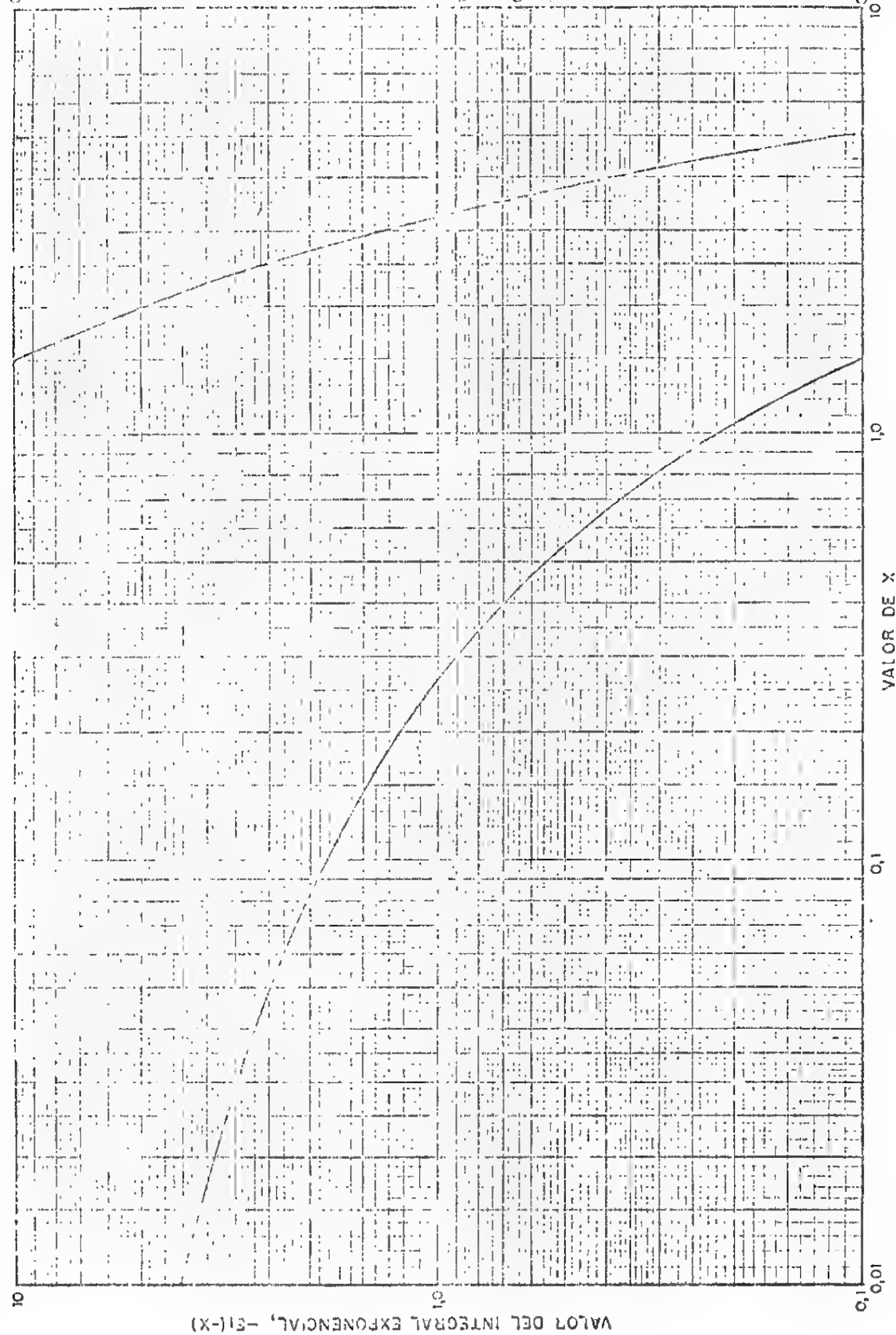


Fig. 1A.- Valores del Integral Exponencial,  $-Ei(-X)$  como función de X

# APENDICE B

Determinación del Cambio de Presión Adimensional,  $\Delta p(t_D)$ , en Términos de  $t_D$ , para el Caso 3 de Sistemas Radiales, usando la Función  $F(t_{DA})$  de Matthews, Brons y Hazebroek, MBH<sup>28</sup>.

La ecuación para calcular la presión a un tiempo  $t$ , de un pozo situado en un sistema radial limitado y que fluye a una rata constante puede expresarse por<sup>28</sup>,

$$p(r_w, t) = p_i - \frac{q\mu B}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{\phi\mu c r_w^2}{4kt}\right) + Y(t_{DA}) \right] \quad (1B)$$

donde  $t_{DA}$  está definido por,

$$t_{DA} = \frac{kt}{\phi\mu c\pi r_w^2} = \frac{kt}{\phi\mu cA} \quad (2B)$$

$Y(t_{DA})$  es solo función de  $t_{DA}$  para valores relativamente grandes de  $r_{eD}$ , tal que  $1/r_{eD}^2 \approx 0$ , y representa, al multiplicarse por  $q\mu B/4\pi kh$  la caída extra de presión comparada con la solución para yacimientos infinitos, debido al límite del yacimiento. (Recuérdese que en el caso de intrusión de agua a un yacimiento,  $r_w = R_i$ ).

MBH<sup>28</sup> desarrollaron una relación para calcular  $Y(t_{DA})$  dada por,

$$F(t_{DA}) = 4\pi t_{DA} - Y(t_{DA}) \quad (3B)$$

La función  $F(t_{DA})$  se representa gráficamente en la Fig.1B en términos de  $t_{DA}$ .

Introduciendo la Ec.(3B) en la Ec.(1B),

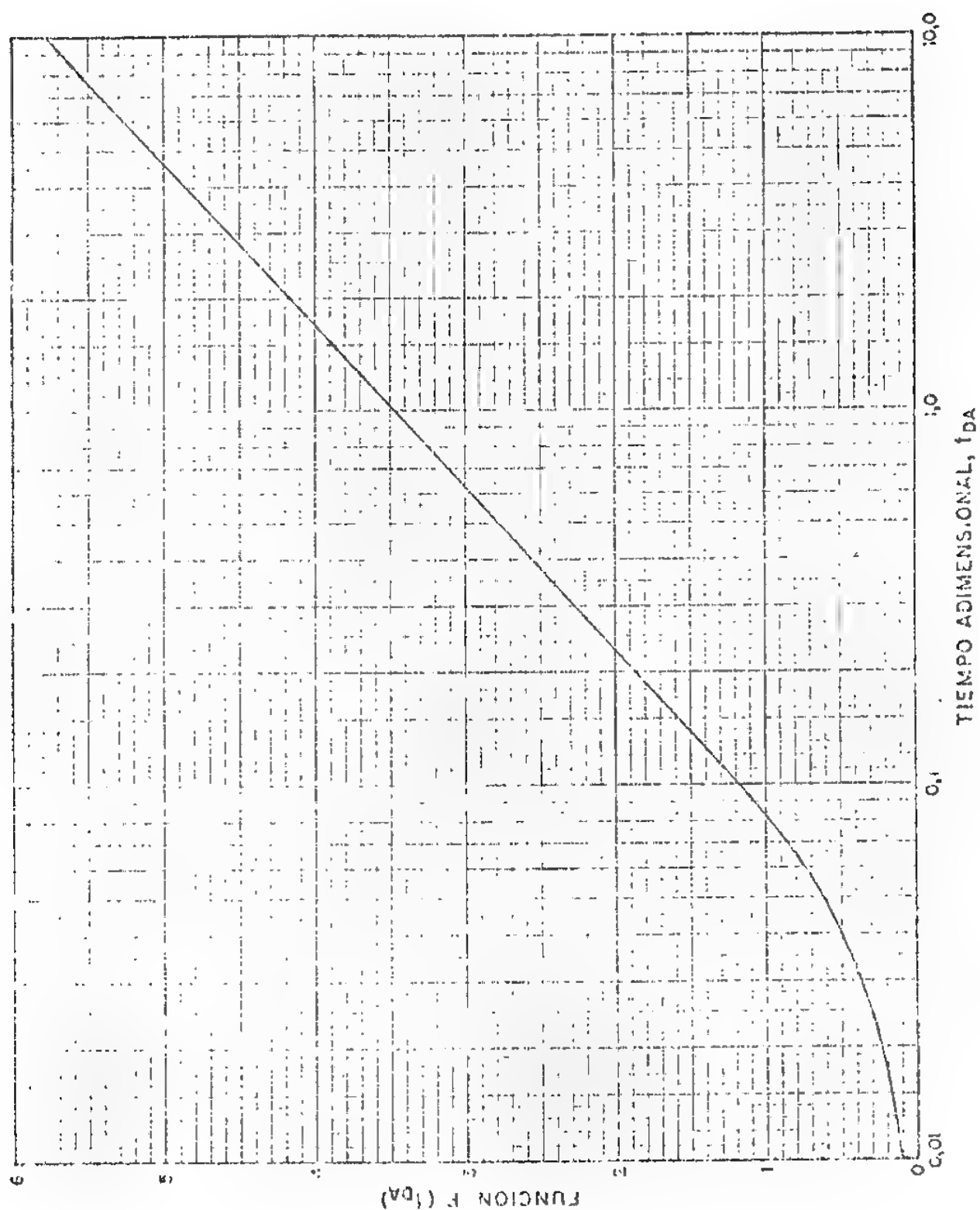


Fig.1B.- Función de  $MBd$ ,  $F(t_{DA})$ , contra tiempo adimensional,  $t_{DA}$ , para un área de drenaje circular (Referencia 28)

$$p(r_w, t) = p_i - \frac{q_{AB}}{4\pi kh} \left[ -Ei\left(-\frac{\phi \mu c r_w^2}{4kt}\right) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA}) \right] \quad (4B)$$

van Everdingen y Hurst<sup>7</sup> definen  $\Delta p(t_D)$ , Ec.(35) del texto,

$$\Delta p(t_D) = \frac{2\pi kh}{q_{AB}} \left[ p_i - p(r_w, t) \right] \quad (5B)$$

reemplazando la Ec.(4B) en la Ec.(5B),

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2} \left[ -Ei\left(-\frac{\phi \mu c r_w^2}{4kt}\right) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA}) \right] \quad (6B)$$

ya que,

$$t_D = \frac{kt}{\phi \mu c r_w^2} \quad (7B)$$

luego,

$$t_{DA} = \frac{t_D}{\pi r_{eD}^2} \quad (8B)$$

y la Ec.(6B) puede escribirse,

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2} \left[ -Ei\left(-\frac{1}{4t_D}\right) + 4\pi t_{DA} - F(t_{DA}) \right] \quad (9B)$$

La ecuación anterior se usa en el cálculo de  $\Delta p(t_D)$ , para diferentes valores de  $r_{eD}$ , en función de  $t_D$ .

Si  $t_{DA} > 0,1$ , puede escribirse<sup>29</sup>,

$$F(t_{DA}) = \ln(C_A t_{DA}) \quad (10B)$$

donde<sup>30</sup>,

$$C_A = \frac{4\pi e^{3/2}}{\gamma} = 31,6 \quad (11B)$$

donde,  $\gamma$  = constante de Euler = 1,78...<sup>31</sup>. Por tanto, la Ec.(9B) puede escribirse,

$$\Delta p(t_D) = \frac{1}{2} \left[ -Ei\left(-\frac{1}{4t_D}\right) + 4\pi t_{DA} - \ln(31,6 t_{DA}) \right] \quad (12B)$$

Esta expresión es la Ec.(61) del texto.

# APENDICE C

## 1 - Cálculo del Integral $f(p,t)$ de la Ecuación de Schilthuis,

Ec.(101). El integral de esta ecuación se define por,

$$f(p,t) = \int_0^t (p_i - p) dt \quad (1C)$$

La Fig.55 presenta la historia de presión de un yacimiento (contacto agua-petróleo). De la historia se conocen los valores de presión  $p_i, p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$  a los tiempos  $0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$ . El integral  $f(p,t)$  representa el área por encima de la curva, es decir, el área comprendida entre la curva continua y la línea punteada horizontal superior.

El método del cálculo del integral  $f(p,t)$  puede hacerse de varias maneras de acuerdo a la definición del diferencial de presión  $\Delta p$ . Si el  $\Delta p$  se define,

$$\Delta p_j = (p_i - p_j) \quad (2C)$$

donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , luego el área por encima de la curva puede calcularse por la sumatoria de una serie de áreas de trapecios, excepto para el primer  $\Delta t = (t_1 - 0)$  que será el área de un triángulo. Si además se define, .

$$\Delta t_j = (t_j - t_{j-1}) \quad (3C)$$

donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  (donde  $t_0 = 0$ ), el área encima de la curva puede escribirse,

$$f(p, t) = \left( -\frac{\Delta p_1}{2} \right) \Delta t_1 + \left( -\frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{2} \right) \Delta t_2 + \left( -\frac{\Delta p_2 + \Delta p_3}{2} \right) \Delta t_3 + \dots + \left( -\frac{\Delta p_{n-1} + \Delta p_n}{2} \right) \Delta t_n \quad (4C)$$

$$f(p, t) = \frac{1}{2} \left[ \Delta p_n \Delta t_n + \sum_{j=1}^{n-1} \Delta p_j (\Delta t_j + \Delta t_{j+1}) \right] \quad (5C)$$

Reemplazando las Ecs.(2C) y (3C) en la Ec.(4C),

$$f(p, t) = \frac{1}{2} \left[ (p_i - p_1)(t_1 - t_0) + (p_i - p_1 + p_i - p_2)(t_2 - t_1) + (p_i - p_2 + p_1 - p_3)(t_3 - t_2) + \dots + (p_i - p_{n-1} + p_i - p_n)(t_n - t_{n-1}) \right] \quad (6C)$$

$$f(p, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (2p_i - p_j - p_{j-1})(t_j - t_{j-1}) \quad (7C)$$

$$= p_i \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j + p_{j-1})(t_j - t_{j-1}) \quad (8C)$$

donde  $p_0 = p_i$ . Si el  $\Delta t_j = (t_j - t_{j-1})$  es constante e igual a  $\Delta t$ , es decir, los intervalos de tiempo son iguales, las Ecs.(5C), (7C) y (8C), pueden escribirse,

$$f(p, t) = \frac{\Delta t}{2} \left[ \Delta p_n + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \Delta p_j \right] \quad (9C)$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^n (2p_i - p_i - p_{j-1}) \quad (10C)$$

$$= \Delta t \left[ np_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j + p_{j-1}) \right] \quad (11C)$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \left[ (2n-1)p_i - p_n - 2 \sum_{j=1}^{n-1} p_j \right] \quad (12C)$$

Si en el análisis de la historia del yacimiento o en la predicción es necesario utilizar la Ec.(119), el diferencial de presión usado en esta ecuación se define en la forma indicada en la Fig. 55, Ec.(122) del texto,

$$\Delta p_j = \frac{1}{2}(p_{j-2} - p_j) \quad (13C)$$

donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  y  $p_{-1} = p_1 = p_i$ . Si además, el  $\Delta t_j$  se define por la Ec.(3C), en este caso el área por encima de la curva estará dada por la suma de las áreas de los diferentes rectángulos que aparecen en la Fig.55,

$$f(p,t) = \Delta p_1 \Delta t_1 + (\Delta p_1 + \Delta p_2) \Delta t_2 + (\Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3) \Delta t_3 + \dots + (\Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 + \dots + \Delta p_n) \Delta t_n \quad (14C)$$

$$f(p,t) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n p_i \right) \Delta t_j \quad (15C)$$

Reemplazando el  $\Delta p_j$  de la Ec.(13C), se obtienen las Ecs.(7C) y (8C) deducidas anteriormente.

Si los intervalos de tiempo son iguales,  $\Delta t_j$  es constante e igual a  $\Delta t$ , la Ec.(15C) puede escribirse,

$$f(p,t) = \Delta t \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \Delta p_i \quad (16C)$$

$$= \Delta t \sum_{j=1}^n (n+1-j) \Delta p_j \quad (17C)$$

Reemplazando los valores de  $\Delta p_j$  de la Ec.(13C), se obtienen las Ecs.



(9C) a (12C) deducidas anteriormente.

Finalmente, si el diferencial de presión se define por,

$$\Delta p_j = (p_{j-1} - p_j) \quad (18C)$$

donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Para  $j = 1$ ,  $p_0 = p_1$ . Como antes el valor de  $\Delta t_j$  se define por la Ec.(3C) y el área por encima de la curva estará dado por la suma de las áreas de rectángulos y triángulos en la siguiente forma,

$$f(p,t) = \frac{\Delta p_1}{2} \Delta t_1 + (\Delta p_1 + \frac{\Delta p_2}{2}) \Delta t_2 + (\Delta p_1 + \Delta p_2 + \frac{\Delta p_3}{2}) \Delta t_3 \\ + \dots + (\Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 + \dots + \frac{\Delta p_n}{2}) \Delta t_n \quad (19C)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta p_j \Delta t_j + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^j \Delta p_i \right) \Delta t_{j+1} \quad (20C)$$

Reemplazando el valor de  $\Delta p_j$  de la Ec.(18C), se obtienen las Ecs. (7C) y (8C).

Si los intervalos de tiempo son iguales,  $\Delta t_j$  es constante e igual a  $\Delta t$ , la ecuación anterior puede escribirse,

$$f(p,t) = \frac{\Delta t}{2} \left[ \sum_{j=1}^n \Delta p_j + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^j \Delta p_i \right) \right] \quad (21C)$$

Finalmente reemplazando  $\Delta p_j$  por la Ec.(18C), se obtienen las Ecs. (10C) a (12C)

2- Cálculo del Integral  $f(p,t)$  de la Ecuación de Furst Modificada, Ec.(109). El integral de esta ecuación se define por,

$$f(p,t) = \int_0^t \frac{p_i - p}{\log(at)} dt = \int_0^t \frac{p}{\log(at)} dt \quad (22C)$$

Como antes, se conoce la historia de presión, o sea una serie de presiones  $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$  a los tiempos  $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  respectivamente. Para obtener gráficamente el valor del integral de la Ec.(22C), basta calcular los valores de  $\Delta p_j$  de acuerdo a la Ec. (2C), dividir cada  $\Delta p_j$  por el  $\log(at_j)$  correspondiente y graficar los valores de  $\Delta p_j / \log(at_j)$  como función de  $t$ . El área bajo la curva resultante, será el valor del integral. De nuevo, el tiempo estará dividido en intervalos de acuerdo a la Ec.(3C). El área bajo la curva será la suma de las áreas de una serie de trapecios, excepto en el primer intervalo que será el área de un triángulo,

$$f(p,t) = \frac{1}{2} \frac{\Delta p_1}{\log(at_1)} \Delta t_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p_1}{\log(at_1)} + \frac{\Delta p_2}{\log(at_2)} \right) \Delta t_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p_2}{\log(at_2)} + \frac{\Delta p_3}{\log(at_3)} \right) \Delta t_3 + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p_{n-1}}{\log(at_{n-1})} + \frac{\Delta p_n}{\log(at_n)} \right) \Delta t_n \quad (23C)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta p_n}{\log(at_n)} \Delta t_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta p_j}{\log(at_j)} (\Delta t_j + \Delta t_{j+1}) \right] \quad (24C)$$

Reemplazando los valores de  $\Delta p$  y  $\Delta t$  de las Ecs.(2C) y (3C),

$$F(p,t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_i - p_n}{\log(at_n)} (t_n - t_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_i - p_j}{\log(at_j)} (t_{j+1} - t_{j-1}) \right] \quad (25C)$$

Si los intervalos de tiempo son iguales, es decir,  $\Delta t_j =$  constante =  $\Delta t$ , las Ecs.(24C) y (25C) pueden escribirse,

$$f(p,t) = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\Delta p_n}{\log(at_n)} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta p_j}{\log(at_j)} \right] \quad (26C)$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{p_i - p_n}{\log(at_n)} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_i - p_j}{\log(at_j)} \right] \quad (27C)$$

3.- Cálculo de la sumatoria  $f(p,t)$  de la Ecuación de van - Everdingen y Hurst, Ec.(119). La sumatoria de esta ecuación está definida por,

$$f(p,t) = \sum_{j=1}^n \Delta p_j Q[(t_n - t_{j-1})_D] \quad (28C)$$

donde  $t_n$  es el tiempo a la cual se desea calcular la sumatoria  $f(p,t)$ . El valor de  $\Delta p_j$  se obtiene en la forma indicada en la Fig.55 y según se discutió en el texto, Ec.(122).

APENDICE D

Determinación del Petróleo o Gas Originalmente en el Yacimiento, N ó G y la Constante de Intrusión de Agua, C, por Mínimos Cuadrados<sup>38</sup>.

Las Ecs.(136) y (144) del texto pueden escribirse,

$$Y = CX + A \quad (1D)$$

donde A, constante; para yacimientos de petróleo es N y para yacimientos de gas es G. Los valores de C y A (constantes) pueden determinarse por mínimos cuadrados, siempre y cuando se tenga una serie de valores de Y y X. Cuando la ecuación se escribe en la forma anterior se habla de LINEA DE REGRESION DE Y SOBRE X.

Considerando la ecuación anterior para yacimientos de petróleo, A=N, escribiéndola para una serie de valores de Y y X, y sumando las ecuaciones resultantes puede escribirse la denominada primera ecuación normal,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = C \sum_{i=1}^n X_i + nN \quad (2D)$$

Si cada una de las ecuaciones anteriores se multiplica por X, y se suman las ecuaciones resultantes, se obtiene la segunda ecuación normal.

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = C \sum_{i=1}^n X_i^2 + N \sum_{i=1}^n X_i \quad (3D)$$

despejando C y N de estas dos ecuaciones,

$$C = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (4D)$$

$$N = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (5D)$$

o también si el valor de C se reemplaza en la Ec.(2D),

$$N = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n y_i - C \sum_{i=1}^n x_i) \quad (6D)$$

La Ec.(1D) puede arreglarse en forma diferente. Dividiendo por C y transponiendo términos,

$$X = \frac{1}{C} Y - \frac{1}{C} N \quad (7D)$$

Si se define,

$$C' = \frac{1}{C} \quad (8D)$$

$$N' = - \frac{1}{C} N = C' N \quad (9D)$$

la Ec.(7D) puede escribirse,

$$X = C' Y + N' \quad (10D)$$

Cuando la ecuación de la línea recta se escribe en esta forma, se habla de LINEA DE REGRESION DE X SOBRE Y. Los valores de C' y N' son constantes.

En forma similar al caso anterior pueden escribirse las ecuaciones normales,

$$\sum_1^n X_i = C' \sum_1^n Y_i + nN' \quad (11D)$$

$$\sum_1^n X_i Y_i = C' \sum_1^n Y_i^2 + N' \sum_1^n Y_i \quad (12D)$$

de donde puede obtenerse  $C'$  y  $N'$

$$C' = \frac{n \sum_1^n X_i Y_i - (\sum_1^n X_i)(\sum_1^n Y_i)}{n \sum_1^n Y_i^2 - (\sum_1^n Y_i)^2} \quad (13D)$$

$$N' = \frac{(\sum_1^n Y_i^2)(\sum_1^n X_i) - (\sum_1^n Y_i)(\sum_1^n X_i Y_i)}{n \sum_1^n Y_i^2 - (\sum_1^n Y_i)^2} \quad (14D)$$

o también se el valor de  $C'$  se reemplaza en la Ec.(11D),

$$N' = \frac{1}{n} \left( \sum_1^n X_i - C' \sum_1^n Y_i \right) \quad (15D)$$

Una vez obtenidos  $C'$  y  $N'$ , puede determinarse  $C$  y  $N$  a través de las Ecs.(8D) y (9D).

Cuando se trata de yacimientos de gas, se cumplen exactamente las mismas ecuaciones, solo que en lugar de calcular  $N$  y  $N'$  el valor correspondiente será  $G$  y  $G'$ . Además debe tenerse cuidado al calcular  $Y$  y  $X$ , usar las definiciones correspondientes de acuerdo al tipo de yacimiento y tipo de intrusión.

# YACIMIENTOS CON EMPUJE HIDRAULICO

RAMIRO PEREZ PALACIO

## ERRORES

<u>Página</u>	<u>Línea</u>	<u>Dice</u>	<u>Debe Decir</u>
1	5	concecuencia	consecuencia
2	27	variado	variada
3	7	son resultado	es resultado
5	14	lates	tales
5	24-25	energís	energía
16	23	desplacen	desplacen
17	4	coordenadas	coordenadas
17	13	pororso	poroso
17	22	$(L^3/T)L^2 = L/T)$	$(L^3/T/L^2 = L/T)$
22	Ec.(11)	$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial p}$	$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$
25	13	pude	puede
32	12	$(\frac{\partial p}{\partial x}) = 0$	$(\frac{\partial p}{\partial x})_L = 0$
33	Ec.(28)	$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\sum_{n=1}^{\infty}$
35	2	imitario	unitario
37	15	presentandas	presentadas
48	1	aproximarse	aproximarse
50	22	luego Chatas <sup>8</sup> .	luego por Chatas <sup>8</sup> .
57	11	Apéndiece	Apéndice
58	Ec.(48):	El numerador dentro del signo integral debe ser: $(1 - e^{-u^2 t_D}) [J_1(u)Y_0(ur_D) - Y_1(u)J_0(ur_D)] du$	
58	última	página siguiente.	página 65.
65		El valor de $\pi$ que entra en las definiciones de $\text{ierf}(x)$ , $\text{erfc}(x)$ y $\text{erf}(x)$ debe ser: $\sqrt{\pi}$	
65		Los límites de integración de la definición de $\text{erfc}(x)$ debe ser: $\int_x^{\infty}$ y no $\int_0^{\infty}$	
77	18	con las raíces	son las raíces
97	7	$t_D \geq 0,5(r_{eD})^2$	$t_D \geq 0,5(r_{eD})^3$

Página	Línea	Dice	Debe Decir
117	10	dividada	dividida
126	15	histroia	historia
136	21-22	obtenrse	obtenerse
137	Ec.(97):	Debe ser: $W_e = NB_{oi} - (N-N_p)B_o + W_p - W_i$	
138	2	eucaciones	ecuaciones
138	5	eliminana	eliminará
139	5	concer	conocer
140	11-12	calcularse	hacerse
140	12	conocen	conoce
140	13	series	serie
141	13	días meses	días, meses
142	8	ya que se $C_s$ se	ya que $C_s$ se
143	Ec.(118):	La última sumatoria a la derecha del nume rador debe ser: $\sum_{j=1}^n C_{sj} t_j \log(t_j)$ y no $\sum_{j=1}^n C_{cj} \log(t_j)$	
143	9	represetna	representa
145	8	discutido	discutido
145	9	conocen	conoce
145	19	La parte derecha de la ecuación para $\Delta p_3$ debe ser: $\frac{1}{2} (p_i - p_3)$ y no $\frac{1}{2} (p_1 - p_3)$	
147	20	converitr	convertir
148		conociemiento	conocimiento
149	Ec.(130):	Debe ser: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (C_{vp} - C_{vj})^2}$	
157	3	calculado	cálculo
158	17	obtenrse	obtenerse
159	11	razoanes	razones
161	20	infoermación	información
162	20	graficados	graficados
164	5	que para que	para cual
165	5	incensitivo	insensitivo
166	2	McEwen	McEwen
167	Ec.(160):	Debe ser: $X = G_p B_g + W_p - W_i$	
167	13	sencible	sensible
169	13	calor	valor
169	última	yacimienta	yacimientos



Página	Línea	Dice	Debe Decir
170	Ec.(167):	$Q(t_D) = \Delta t_D^m$	$Q(t_D) = (\Delta t_D)^m$
171	1	cosntante	constante
171	3	cuanta	cuenta
171	16	yacimiento	yacimientos
174	10	taels	tales
175	4	dividdiéndolos	dividiéndolos
176	9	$\Delta p (p_o - p_g)$	$\Delta p = - (p_o - p_g)$
178	9	facores	factores
179	1	en se desee	en que se desee
180	10	expredada	expresada
181	3	productivifad, j	productividad, J
181	2	en	el
181	2	produtividad	productividad
181	12	prevenir	prevenir
181	16	hidráulico	hidráulico
181	18	facotr	factor
181	22	a la que	a la cual
183	1	conocerce	conocerse
184	6	Un aumento	Una disminución
187	1	mecionado	mentionado
187	19	fácilmente	facilmente
188	4	correspidente	correspondiente
189	pénúltima	aumneta	aumenta
190	3	constante. Fig. 19	constante.
192	Ec.(194):	Debe ser: $\Delta Z_j = Z(J\Delta t) - Z((j-1)\Delta t)$	
194	22	repatin	repiten
195	4	corrección	corrección
197	6	a la que	en la que
197	16	En	El
199	5	etécticos	eléctricos
200	1	condesador	condensador
200	1	mircofaradios	microfaradios
200	2	eléctircas	eléctricas
201	16	correinte	corriente
204	21	ecuacioens	ecuaciones
215	35	896;	896, 1963;
230	12	anteior	anterior